Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 2

УДК 519.95+517.933 КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. И. БУЯКАС

О ПОСТРОЕНИИ АВТОНОМНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 18 I 1972)

Пусть поведение объекта регулирования описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \varphi(x, u), \quad y = Cx, \tag{1}$$

где x — n-мерный вектор фазовых координат системы, u — r-мерный вектор управления, y — r-мерный вектор, относительно которого ставится задача управления, φ — n-мерная вектор-функция, C — постоянная матрица размерности $n \times n$. В ряде прикладных задач желательно развязать управляющее воздействие относительно координат вектора $y = (y_1, \ldots, y_r)$, а именно построить систему так, чтобы управление u_i действовало лишь на координату y_i, не возмущая координат y_j, $j \neq i$. Систему, обладающую таким свойством, назовем автономно управляемой (автономной). Отметим, что значение координаты y_i в любой момент времени t есть функционал

$$y_i(t) = y_i[x(0), u_i(\tau), \bar{u}_i(\tau)], \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t, \tag{2}$$

где $\bar{u}_i = (u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_r)$.

Определение 1. Система (1) автономно управляема по i-й координате, если функционал (2) не зависит от $\bar{u}_i(\tau)$.

Определение 2. Система (1) полностью автономна, если она автономно управляема по всем координатам [1].

Пусть объект регулирования, поведение которого описывается системой

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \tag{3}$$

где A, B, C — постоянные матрицы размерности $n \times n$, $n \times r$ и $r \times n$, свойствами автономности не обладает. Возникают вопросы: 1) При каких матрицах A, B, C эти свойства можно обеспечить выбором закона обратной связи? 2) Какими должны быть эти законы? 3) Когда автономность можно обеспечить обратной связью по координатам $y_1, \ldots, y_r$? 4) Когда полученная система автономного регулирования асимптотически устойчива? Законы обратной связи, обеспечивающие системе (3) свойства автономности, будем называть автономными регуляторами. Задача отыскания множества регуляторов, обеспечивающих системе заданные свойства, была поставлена А. М. Летовым [2].

Представим управление в виде двух слагаемых

$$u = v + f,$$

где $f(t)$ — внешнее управляющее воздействие, $v(x)$ — закон обратной связи, подлежащий определению (рис. 1).

Задача. Найти необходимые и достаточные условия, при которых в классе непрерывно дифференцируемых функций существуют законы обратной связи

$$v = v(x), \tag{4}$$

обеспечивающие системе

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + Bv(x) + Bf,$$
$$y = Cx \tag{5}$$

автономность по i-й координате или полную автономность относительно управления f.

В классе линейных регуляторов близкая задача рассматривалась в ([3], [4]). В данной работе получены простые условия для широкого класса законов обратной связи.

Рассмотрим скалярные произведения

$$(c_i, A^s b^j), \quad s = 0, 1, \ldots, n-1;$$
$$i, j = 1, \ldots, r. \tag{6}$$

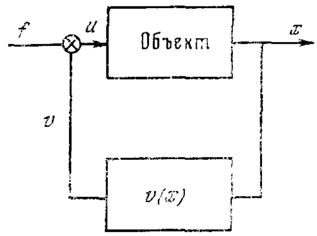

Рис. 1

Здесь и ниже через d^i обозначается i-й вектор-столбец, а через d_j — j-я вектор-строка произвольной матрицы D. Пусть n_{ij} — наименьшее значение s, при котором скалярное произведение (6) отлично от нуля:

$$(c_i, \ A^{n_{ij}} b^j) = e_i^j \neq 0. \tag{7}$$

Теорема 1. *Для существования регуляторов* (4), *обеспечивающих системе* (5) *автономность по i-й координате, необходимо и достаточно выполнения условий*

$$n_{ii} < n_{ij}, \quad j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, r. \tag{8}$$

Теорема 2. *Для существования регуляторов* (4), *обеспечивающих системе* (5) *полную автономность, необходимо и достаточно выполнения условий*

$$n_{ii} < n_{ij}, \quad i = 1, \ldots, r; \quad j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, r. \tag{9}$$

Теорема 3. *Если выполнены условия* (9), *то класс регуляторов*

$$v_i = -\frac{1}{(c_i, \ A^{n_{ii}} b^i)} (c_i, \ A^{(n_{ii}+1)} x) + \bar{v}_i, \tag{10}$$

где $\bar{v}_i$ — произвольная непрерывная функция y_i, $dy_i / dt, \ldots, d^{n_{ii}} y_i / dt^{n_{ii}}$ обеспечивает полную автономность системе (5).

Если в системе (3) выполнены условия (9) и выбрано управление (10), то поведение координаты y_i описывается уравнением

$$d^{(n_{ii}+1)} y_i / dt^{(n_{ii}+1)} = e_i^i \bar{v}_i + e_i^i f_i(t). \tag{11}$$

Тогда произвол в выборе функции $\bar{v}_i$ можно использовать для обеспечения качества переходного процесса по координате y_i, решая соответствующую задачу оптимального управления для (11).

С прикладной точки зрения важно выяснить, когда автономность системе можно обеспечить обратной связью по координатам $y_1, \ldots, y_r$.

Теорема 4. *Для того чтобы автономность системе* (5) *можно было обеспечить обратной связью по координатам $y_1, \ldots, y_r$, достаточно, чтобы векторы $A^{*(n_{ii}+1)} c_i$ выражались линейно через векторы*

$$c_1, c_2, \ldots, c_r, A^* c_i, A^{*2} c_i, \ldots, A^{*n_{ii}} c_i.$$

Тогда, если

$$A^{*(n_{ii}+1)} c_i = \sum_{j=1}^{r} k_{ij} c_j + \sum_{j=1}^{n_{ii}} l_{ij} A^{*j} c_i,$$

то регуляторы

$$v_i(y) = -[1/(c_i,\ A^{n_{ii}}b^i)] \sum_{j=1}^{r} k_{ij}y_j, \quad i=1,\ldots,r,$$

при выполнении условий (9) *обеспечивают полную автономность системе* (5).

Важно знать, когда в системе (5) можно обеспечить одновременно автономность и асимптотическую устойчивость (при $f(t)=0$). Для ответа на этот вопрос построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений по следующему правилу.

1) Подставим в систему (3) управления

$$u_i = -[1/(c_i, A^{n_{ii}}b^i)](c_i, A^{(n_{ii}+1)}x), \quad i=1,\ldots,r.$$

Получим систему

$$\dot{x} = Lx, \quad y = Cx. \tag{12}$$

2) Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$Px=0, \quad P^* = |\overset{*}{c_1},\ldots,A^{n_{11}}\overset{*}{c_1},\ldots,\overset{*}{c_r},\ldots,A^{n_{rr}}\overset{*}{c_r}|;$$

так как $\operatorname{rang} P = S = \sum_{i1}^{r} n_{ii} + r$, то система может быть разрешена относительно s координат вектора $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Обозначая совокупность этих координат вектором $\bar{x}$, остальные координаты вектором x_0, имеем

$$\bar{x} = P_0x_0. \tag{13}$$

3) В системе дифференциальных уравнений (13) вычеркнем строки, соответствующие $\dot{\bar{x}}$, в правой части оставшихся уравнений вместо $\bar{x}$ подставим (13). Приходим к системе линейных дифференциальных уравнений порядка $n-s$

$$\dot{x}_0 = Nx_0. \tag{14}$$

Теорема 5. *Если выполнены условия* (9) *и система* (14) *асимптотически устойчива, то существуют регуляторы, обеспечивающие системе* (5) *полную автономность и асимптотическую устойчивость при* $f(t)\equiv 0$.

В частности, регуляторы класса (10) обладают указанными свойствами, если условия теоремы 5 выполнены и $\bar{v}_i$ — линейная функция, обеспечивающая асимптотическую устойчивость системе

$$d^{(n_{ii}+1)}y_i/dt^{(n_{ii}+1)} = e_i^i\bar{v}_i(y_i,\ldots,d^{n_{ii}}y_i/dt^{n_{ii}}).$$

В заключение отметим, что полностью автономная система обладает также свойством автономности по Вознесенскому ([5]).

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
9 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Кухтенко, Проблема инвариантности в автоматике, Киев, 1963. [2] А. М. Летов, Дифференциальные уравнения, № 4 (1970). [3] E. G. Gilbert, SIAM J. on Control., 7, № 1 (1969). [4] W. M. Wonham, A. S. Morse, ibid., 8, № 1 (1970). [5] И. Н. Вознесенский, За советское энергооборудование, Сборн. статей, 1934.