Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 2

УДК 513.88+517.948 *МАТЕМАТИКА*

И. Л. ВУЛИС, М. З. СОЛОМЯК

СПЕКТРАЛЬНАЯ АСИМПТОТИКА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 28 III 1972)

1. В заметке рассматриваются эллиптические дифференциальные операторы второго порядка, вырождающиеся на границе области. Степень вырождения такова, что еще сохраняется дискретность спектра, но порядок асимптотики, по сравнению с невырожденным случаем, меняется. Двусторонние оценки спектра таких задач были найдены в ряде работ ([1–7]). Что касается асимптотики, то она была вычислена лишь в отдельных частных случаях ([1, 5, 8]).

2. Задачу на спектр мы рассматриваем в вариационной постановке. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ — ограниченная область с границей S класса C^1, $\rho = \rho(x, S)$ — расстояние от точки $x \in \mathbf{R}^m$ до S. Пусть в $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$ задана вещественная симметричная непрерывная и равномерно положительно определенная матрица $a(x) = \{a_{kl}(x)\}$, $k, l = 1, \ldots m$. Пусть $\alpha \in [0, 2)$ и $h \geqslant 0$. Определим квадратичную форму

$$A_{\alpha,h}[u,u] = \int_\Omega \rho^\alpha [(a\nabla u, \nabla u) + h|u|^2]dx. \qquad (1)$$

Обозначим через $H_\alpha(a;\ h)$, $h > 0$, пополнение множества $C^\infty(\bar{\Omega})$ по метрике формы $A_{\alpha,h}$. При $\alpha < 1$, $h \geqslant 0$ обозначим через $\mathring{H}_\alpha(a;\ h)$ пополнение множества $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ по той же метрике.

Пусть $b(x)$ — непрерывная в $\bar{\Omega}$ вещественная функция $\beta \in [0, 2-\alpha)$. Квадратичная форма

$$B_\beta[u, u] = \int_\Omega \rho^{-\beta} b\,|u|^2 dx \qquad (2)$$

вполне непрерывна в $\mathring{H}_\alpha(a;\ h)$, а при $\beta < 1$ — также в $H_\alpha(a;\ h)$. Самосопряженный оператор, определяемый формой (2) в пространстве $\mathring{H}_\alpha(a;\ h)$, будем называть оператором задачи D (задачи Дирихле). Оператор, определяемый формой (2) в пространстве $H_\alpha(a;\ h)$, назовем оператором задачи N (задачи Неймана). Определение оператора задачи N можно распространить и на случай $h = 0$ (ср. ([9])), однако мы не будем на этом останавливаться. Отметим, что при $0 \leqslant \alpha$, $\beta < 1$ определены обе задачи; при $\alpha \geqslant 1$ определен лишь оператор задачи N, а при $\beta \geqslant 1$ — лишь оператор задачи D.

Положительные собственные значения $\lambda_n^+(A_{\alpha,h}, B_\beta;\ D)$ (отрицательные собственные значения $-\lambda_n^-(A_{\alpha,h}, B_\beta;\ D)$) оператора задачи D совпадают с последовательными максимумами (минимумами) отношения

$$B_\beta[u,\ u] \,/\, A_{\alpha,h}[u,\ u] \qquad (3)$$

при $u \in \mathring{H}_\alpha(a;\ h)$. Аналогично, собственные значения $\pm\lambda_n(A_{\alpha,h}, B_\beta, N)$ оператора задачи N совпадают с последовательными экстремумами отношения (3) при $u \in H_\alpha(a;\ h)$. Соответствующие функции распределения обозначим через

$$n_\pm(\lambda;\ D), \quad n_\pm(\lambda;\ N). \qquad (4)$$

3. Если показатели α, β удовлетворяют условию $\alpha+\beta<2/m$ (слабое вырождение), то асимптотическое поведение функций $n_\pm$ известно: частным случаем результатов работы [10] является формула

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^{m/2}n_\pm(\lambda)=(2\pi)^{-m}V_m\int_\Omega \rho^{-(\alpha+\beta)m/2}b_\pm^{m/2}(\det a)^{-1/2}dx,\quad \alpha+\beta<2/m.$$

Здесь $n_\pm(\lambda)$ — любая из функций (4), $b_\pm=\max(\pm b,\ 0)$, V_m — объем единичного шара в $\mathbf{R}^m$. В широком классе случаев эта формула была известна и ранее (см. [1,4]).

Не представляет значительных трудностей вычисление спектральной асимптотики и при условии $\alpha+\beta=2/m$. Обычная вариационная техника приводит к формуле

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^{m/2}(\ln 1/\lambda)^{-1}n_\pm(\lambda)=(2\pi)^{-m}(2-2/m)^{-1}V_m\int_S b_\pm^{m/2}(\det a)^{-1/2}dS,$$
$$\alpha+\beta=2/m,$$

также известной в ряде случаев [1,5,8].

4. Основной результат настоящей заметки относится к случаю сильного вырождения:

$$2/m<\alpha+\beta<2. \tag{5}$$

Результат формулируется в терминах собственных значений некоторого дифференциального оператора на полуоси.

Обозначим через $\mu_k(\alpha,\ \beta;\ D)$ и $\mu_k(\alpha,\ \beta;\ N)$, $k=1,\ 2,\dots$, собственные значения уравнения

$$-(t^\alpha u')'+t^\alpha u=\mu^{-1}t^{-\beta}u,\quad 0<t<\infty, \tag{6}$$

при краевом условии $u(0)=0$ и $\lim\limits_{t\to 0}[t^\alpha u'(t)]=0$ соответственно. Введем обозначения

$$\begin{aligned} w(\alpha,\beta,\theta;D)&=\sum_k \mu_k^\theta(\alpha,\beta;D);\\ w(\alpha,\beta,\theta;N)&=\sum_k \mu_k^\theta(\alpha,\beta;N).\end{aligned} \tag{7}$$

Обе суммы конечны при $\theta(\alpha+\beta)>1$. Отметим, что при $\alpha+\beta=1$ уравнение (6) есть уравнение Лагерра и значения μ_k явно вычисляются:

$\mu_k(\alpha,\ 1-\alpha;\ D)=(2k-\alpha)^{-1}$, $\mu_k(\alpha,\ 1-\alpha;\ N)=(2k-2+\alpha)^{-1}$.

Теорема 1. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^m$ с границей S класса C^1, $A_{\alpha,h}$ — форма* (1), *B_β — форма* (2); *пусть $\alpha<1$ и выполнено условие* (5).

Тогда для спектра задачи D при $h\geqslant 0$ имеет место асимптотическая формула

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^\theta n_\pm(\lambda;D)=V_{m-1}(2\pi)^{1-m}w\int_S\frac{(a\nu,\nu)^{m/2-\theta}b_\pm^\theta}{(\det a)^{1/2}}dS, \tag{8}$$
$$\theta=\theta(m,\alpha,\beta)=(m-1)/(2-\alpha-\beta),\qquad w=w(\alpha,\beta,\theta;D)$$

($\nu=\nu(x)$ — единичный вектор нормали к S в точке $x\in S$).

Если условие (5) *выполнено при $\beta<1$, то формула* (8) *(при $w=w(\alpha,\ \beta,\ \theta;\ N)$) имеет место для спектра задачи N при $h>0$.*

Замечания. 1) Формула вида (8) сохраняется и тогда, когда вырождение происходит лишь на части S_1 границы S. При этом в (8) войдет интеграл по S_1. 2) Достаточно предполагать непрерывность $a(x)$, $b(x)$ в окрестности поверхности вырождения.

Отметим один частный случай теоремы 1. Пусть $m \geqslant 3$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Тогда $\theta = m - 1$, а коэффициент w выражается через ζ-функцию Римана. В результате получается формула

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{m-1} n_{\pm}(\lambda; N) = \frac{V_{m-1}}{(2\pi)^{m-1}} (1 - 2^{1-m}) \zeta(m-1) \int\limits_S \frac{(av, v)^{1-m/2} b_{\pm}^{m/2}}{(\det a)^{1/2}} dS.$$

В случае, когда a — единичная матрица, $b = 1$, $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^m: |x| \leqslant 1\}$, равносильный результат был получен в ([5], [8]). Это единственный известный авторам пример вычисления спектральной асимптотики при условии сильного вырождения.

5. Доказательство теоремы 1 использует в качестве «модели» следующий результат, относящийся к специальной вариационной задаче для абстрактного дифференциального оператора.

Пусть на плотном множестве $\mathfrak{H}_{\mathfrak{a}}$ сепарабельного гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ задана замкнутая положительно определенная квадратичная форма $\mathfrak{a}[u, u]$. Пусть на $\mathfrak{H}_{\mathfrak{a}}$ задана также неотрицательная квадратичная форма $\mathfrak{b}[u, u]$, вполне непрерывная относительно формы $\mathfrak{a}$. Функцию распределения собственных значений отношения $\mathfrak{b}[u, u] / \mathfrak{a}[u, u]$, $u \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{a}}$, обозначим через $\nu(\lambda)$.

В гильбертовом пространстве абстрактных функций u: $[0, T] \to \mathfrak{H}_{\mathfrak{a}}$, $0 < T \leqslant \infty$, рассмотрим задачу D о спектре отношения

$$\int\limits_0^T t^{-\beta} \mathfrak{b}[u(t), u(t)]\, dt \Big/ \int\limits_0^T t^{\alpha} ((u_t, u_t) + \mathfrak{a}[u(t), u(t)])\, dt$$

при условиях $u(0) = u(T) = 0$. Ставя при $t \to 0$ естественное условие, получим задачу N. По-прежнему задача D рассматривается при $\alpha < 1$ и задача N — при $\beta < 1$. Функции распределения спектров этих задач обозначим через $\mathfrak{n}(\lambda, T; D)$, $\mathfrak{n}(\lambda, T; N)$.

Лемма. а) *Предположим, что функция* $\nu(\lambda)$ *удовлетворяет оценке* $\nu(\lambda) \leqslant K\lambda^{-\gamma}$ *и выполнены условия* $\alpha < 1$, $(\gamma + 1/2)^{-1} < \alpha + \beta < 2$. *Пусть, кроме того,* $\mathfrak{b}[u, u] \leqslant (u, u)$.

Тогда для функции $\mathfrak{n}(\lambda, T; D)$ *имеет место неравенство*

$$\mathfrak{n}(\lambda, T; D) \leqslant Kw(\alpha, \beta, \theta; D)\lambda^{-\theta}, \quad \theta = 2\gamma(2 - \alpha - \beta)^{-1}.$$

б) *Пусть в условиях п* а) $\mathfrak{b}[u, u] = (u, u)$; *предположим, что для функции* $\nu(\lambda)$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{\gamma} \nu(\lambda) = \omega.$$

Тогда при любом $T > 0$ *функция* $\mathfrak{n}(\lambda, T; D)$ *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{\lambda \to 0} \mathfrak{n}(\lambda, T; D) = \omega \cdot w(\alpha, \beta, \theta; D).$$

При $\beta < 1$ *аналогичные результаты справедливы для задачи* N.

6. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ — цилиндр: $\Omega = \Omega' \times (0, T)$, $\Omega' \subset \mathbf{R}^{m-1}$. Лемма позволяет сводить задачу о спектральной асимптотике для уравнения в Ω с «сильным» вырождением на основании $\Omega' \times \{0\}$ к аналогичной невырожденной задаче в Ω'. Далее при доказательстве теоремы 1 используется техника, разработанная в ([9-11]).

Оценки и асимптотические формулы для спектра «негладких» эллиптических задач, доказанные в работах ([9-12]), дают возможность получить для уравнения в цилиндре результаты, которые не покрываются теоремой 1. Приведем в качестве примера утверждение, вытекающее из теоремы 2 работы ([11]).

Ниже $x=(x', x_m)$, $x' \in \Omega'$, $x_m \in (0, T)$, — точка в Ω, ∇' — $(m-1)$-мерный оператор градиента. Пусть $\Omega' \subset \mathbf{R}^{m-1}$ — произвольное ограниченное открытое множество и пусть в Ω' задана эрмитова матрица $a(x') = \{a_{kl}(x'), k, l=1, \ldots, m-1\}$.

Предполагается, что $a \in L_{1\,\mathrm{loc}}(\Omega')$, для почти всех $x' \in \Omega'$ $a(x')$ положительно определена и $a^{-1} \in L_p(\Omega')$ при $2p > m-1$. Пусть $b(x')$ — измеримая ограниченная функция в Ω'. Мы рассмотрим спектр отношения

$$\int_\Omega x_m^{-\beta} b(x') |u(x)|^2 dx \Big/ \int_\Omega x_m^\alpha [|u_{x_m}|^2 + (a(x')\nabla' u, \nabla' u)] dx$$

при условии Дирихле на боковой поверхности и на верхнем основании цилиндра Ω. При $x_m \to 0$ условие D или N ставится по аналогии с п. 2.

Теорема 2. *Пусть удовлетворяются сформулированные выше условия; пусть* $\alpha < 1$ *и выполнено неравенство* (5).

Тогда

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^\theta n_\pm(\lambda; D) = V_{m-1}(2\pi)^{1-m} w \int_{\Omega'} b_\pm^\theta (\det a)^{-1/2} dx',$$
$$\theta = (m-1)/(2-\alpha-\beta), \quad w = w(\alpha, \beta, \theta; D).$$

При $\beta < 1$ *аналогичный результат имеет место для задачи* N.

7. Техника, предложенная в заметке, применима и к вырождающимся уравнениям высших порядков. При этом, однако, не существует одного стандартного уравнения (типа уравнения (6)), которое «обслуживало» бы всевозможные вариационные задачи данного порядка и данной степени вырождения. В связи с этим суммы, аналогичные суммам (7), могут войти в выражение для асимптотического коэффициента под знак интеграла. Аналогичное замечание относится и к задаче для отношения (3) в случае, когда эрмитова матрица $a(x)$ невещественна и вектор $\nu(x)$ не является собственным для $a(x)$ в каждой точке $x \in S$.

В заключение авторы выражают искреннюю признательность В. М. Бабичу и М. Ш. Бирману за обсуждение работы.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
12 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Соломещ, Матем. сборн., 54, 3, 295 (1961). [2] И. А. Соломещ, ДАН, 144, № 4 (1962). [3] M. S. Baouendi, C. Goulaouic, Arch. Rat. Mech. Anal., 34, № 5, 361 (1969). [4] C. Goulaouic, Lect. Notes Math., № 179, 231 (1971). [5] L. Boutet de Monvel, P. Grisvard, C. R., 272, № 1, A23 (1971). [6] A. El Kolli, C. R., 273, № 11, A450 (1971). [7] В. Н. Туловский, Автореф. кандидатской диссертации, МГУ, 1971. [8] N. Shimakura, Proc. Japan Acad. Sci., 46, № 10 Suppl., 1065 (1970). [9] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Функц. анализ, 4, в. 4, 1 (1970). [10] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, там же, 5, в. 1, 69 (1971). [11] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, ДАН, 205, № 2 (1972). [12] Г. В. Розенблюм, ДАН, 202, № 5 (1972).