Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 2

УДК 517.946 МАТЕМАТИКА

В. П. ГЛУШКО

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 3 IV 1972)

Методы, развитые в работе ([1]), позволяют исследовать вопрос о разрешимости общих смешанных задач для параболических уравнений второго порядка с вырождением, используя известную схему (см. ([2])) сведения таких задач к граничным задачам, содержащим комплексный параметр.

В цилиндрической области $Q((x,\ t)\in Q\colon\ x\in\mathscr{D}\subset R_n,\quad 0<t<\infty)$ рассматривается смешанная задача

$$L(x,\ \partial_x)u-\partial_t u=f(x,\ t),\quad (x,\ t)\in Q;\tag{1}$$

$$B(\ x,\ \partial_x,\ \partial_t)u|_{x=x'}=g(x',\ t),\ (x',\ t)\in\Gamma,\tag{2}$$

$$u(x,\ 0)=0,\quad x\in\mathscr{D},\tag{3}$$

где $L(x,\ \partial_x)=a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}+a_i(x)\partial_{x_i}+a_0(x)$ — эллиптический в каждой точке $x\in\mathscr{D}$ оператор с действительными коэффициентами $(a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j>0$, $|\lambda|\neq 0,\ x\in\mathscr{D})$, вырождающийся на границе S этой области $(a_{ij}(x')\nu_i\nu_j=0,\ x'\in S,\ \nu=(\nu_1,\ \nu_2,\ldots,\ \nu_n)$ — внутренняя нормаль к S в точке x'. Здесь и в дальнейшем знак суммы по индексам i и j от 1 до n опускается. Через Γ обозначается боковая поверхность цилиндрической области Q: $\Gamma=S\times(0,\infty))$.

Следуя ([3]), введем дифференциальный оператор $K=(a_i(x)-\partial_{x_j}a_{ij}(x))\partial_{x_i}$. Как показано в ([3]) и ([4]), значения $K\psi$ на S для любой функции $\psi(x)$, обращающейся в нуль на S, не изменяются при любой неособой замене переменных.

Пусть в окрестности точки $x'\in S$ граница локально задается уравнением $\varphi(x)=0$ $(\operatorname{grad}\varphi\neq 0)$. Тогда в пересечении этой окрестности с областью $\mathscr{D}$ можно рассмотреть функцию $\alpha^2(x)=a_{ij}(x)\partial_{x_i}\varphi\partial_{x_j}\varphi$, равную нулю на S.

Условие 1. Если граница S локально задается уравнением $\varphi(x)=0$ $(\operatorname{grad}\varphi\neq 0,\ \varphi>0$ на $\mathscr{D})$, то величина $b(x)=K\varphi$ не обращается в нуль в точках $x'\in S$; величина $K[\alpha^2]$ равна нулю во всех точках $x'\in S$ (последнее предположение, сделанное для упрощения дальнейшего изложения, означает, что рассматривается случай «сильного вырождения»).

Постановка задачи (1) — (3) существенно зависит от знака b на S: граничное условие (2) на Γ ставится лишь при $b(x')<0$; если же $b(x')>0$, то граничное условие (2) снимается. Все приводимые ниже результаты относятся к случаю $b(x')<0$, однако они справедливы и при $b(x')>0$ (при этом, конечно, условия, содержащие граничный оператор B, а также слагаемые, содержащие оператор B, в оценках следует отбросить).

Условие 2. Оператор $L(x,\ \partial_x)$ удовлетворяет условию α-эллиптичности в $\overline{\mathscr{D}}$ (см. ([5])). Если в окрестности точки $x'\in S$ ввести локальную систему координат (л.с.к.) $y=(y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n)=(y',\ y_n)$ $(y_n=0$ на $S)$, то это условие, в частности, означает, что в точке $x'\in S$ главная часть

$L_0^{x'}(\partial_{y'}, \partial_{y_n})$ оператора L, после перехода к л.с.к. удовлетворяет специальному условию эллиптичности (см. ([5])).

Используя л.с.к. в окрестности $A_{x'}$ точки $x' \in S$, граничный оператор можно записать в виде

$$B_{x'}(y', \partial_{y'}, \partial_{y_n}, \partial_t) = \sum_{2k+2l+|\beta'| \leqslant m'} b_{k,l,\beta'}(y') \partial_{y'}^{\beta'} \partial_{y_n}^{l} \partial_t^{k}.$$

Число m' называется вырожденным порядком оператора B в точке x'.

Условие 3. Оператор $B(x, \partial_x, \partial_t)$ удовлетворяет условию дополнительности в точках $x' \in S$ по отношению к оператору $L(x, \partial_x) - \partial_t$, т. е. для любых действительных $\xi' = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ и комплексных p, $\operatorname{Re} p \geqslant 0$, $|\xi'| + |p| > 0$, не обращается в нуль величина

$$\sum_{2k+2l+|\beta'| = m'} b_{k,l,\beta'}(0) \cdot (\sqrt{-1}\,\xi')^{\beta'} p^k \lambda^l(\xi', p) \neq 0,$$

где $\lambda(\xi', p) = -b^{-1}(x')(L_0^{x'}(\sqrt{-1}\,\xi', 0) - p)$.

Условие 4. Коэффициенты $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$, $a_0(x)$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, оператора L принадлежат $C^\infty(\overline{\mathscr{D}})$. Область $\mathscr{D} \subset R_n$ ограничена, и ее граница S принадлежит классу C^∞. Коэффициенты граничного оператора B — бесконечно дифференцируемые функции на S.

На функциях $v(y', y_n)$, определенных в полосе $0 < y_n < d$, $y' \in R_{n-1}$ введем норму

$$|v|^2_{m,\alpha,\sigma} = \int_0^d \int_{R_{n-1}} \sum_{j+2s \leqslant m} \sigma^{m-2s-j} |\alpha^j(y', y_n) \partial_{y_n}^{j+s} v|^2 dy' dy_n +$$

$$+ \int_0^d \int_{R_{n-1}} \Bigg(\sum_{|\beta'| = m-2[m/2]} |\partial_{y'}^{\beta'} \partial_{y_n}^{[m/2]} v|^2 + \sum_{|\beta'| = m} |\partial_{y'}^{\beta'} v|^2 \Bigg) dy' dy_n, \qquad (4)$$

где $\alpha(y', y_n)$ — «весовая» функция, $\sigma > 0$ — параметр.

Как и в ([1]), с помощью (4) строится пространство $H_\alpha^m(\mathscr{D})$ функций $u(x) \in \mathscr{L}_2(\mathscr{D})$, имеющих обобщенные производные в $\mathscr{D}$ до порядка m такие, что конечна норма

$$\|u\|_{m,\alpha,\sigma} = \Bigg\{ \sum_{|\beta| \leqslant m} \int_{\mathscr{D}} \sigma^{m-|\beta|} |\partial_x^\beta(\varphi_0 u)|^2 dx + \sum_{\mu=1}^{M} |(\varphi_\mu u)_\mu|^2_{m,\alpha_\mu,\sigma} \Bigg\}^{1/2},$$

где функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_M(x) \in C_0^\infty(R_n)$ образуют разложение единицы в $\overline{\mathscr{D}}$, причем $\operatorname{supp} \varphi_0 \subset \mathscr{D}$; $\operatorname{supp} \varphi_\mu \subset A_{x_\mu}$ $(\mu \geqslant 1)$; $(\varphi_\mu u)_\mu$ и α_μ — функции $\varphi_\mu(x) u(x)$ и $\alpha(x)$ после перехода к л.с.к. в окрестности точки $x_\mu \in S$ (функция $\alpha(x)$ введена в начале заметки); $\sigma > 0$ — параметр.

Обычным образом определяется пространство $H^m(S)$ на границе ($m \geqslant 0$ целое) с нормой

$$\langle\!\langle w \rangle\!\rangle_{m,\sigma} = \Bigg\{ \sum_{\mu=1}^{M} \sum_{|\beta'| \leqslant m} \sigma^{m-|\beta'|} \int_{R_{n-1}} |\partial_{y'}^{\beta'}(\varphi_\mu w|_S)_\mu|^2 dy' \Bigg\}^{1/2}.$$

Рассматриваются также функции $U(x, p)$, определенные при почти всех $x \in \mathscr{D}$ и комплексных $p = \sigma + \sqrt{-1}\,\tau$, $\sigma \geqslant \gamma > 0$. Функция $U(x, p)$ принадлежит пространству $E_{\alpha,\gamma}^{m,k}(\mathscr{D})$, $0 \leqslant m \leqslant 2k$, если: а) при всех p, $\operatorname{Re} p > \gamma$, и почти всех p, $\operatorname{Re} p = \gamma$, функция $U(x, p)$ принадлежит $H_\alpha^m(\mathscr{D})$; б) при почти всех $x \in \mathscr{D}$, $|\beta| \leqslant m$ и $\operatorname{Re} p \geqslant \gamma$ функции $\partial_x^\beta U(x, p)$ — голоморфные функции p и

$$\int_{\operatorname{Re} p = \gamma} \Bigg(\sum_{|\beta| \leqslant m} |\partial_x^\beta U(x, p)|^2 + |\tau|^{2k} |U(x, p)|^2 \Bigg) dp < \infty;$$

в) конечна норма в $E_{\alpha,\gamma}^{m,k}(\mathscr{D})$:

$$\|U\|_{m,\alpha,k,\gamma}^2 = \int\limits_{\operatorname{Re} p=\gamma} (\|U(-,p)\|_{m,\alpha,\gamma}^2 + |\tau|^{2k}\|U(-,p)\|_0^2)\,dp.$$

Аналогично вводятся пространства $E_{1,\gamma}^{m,k}(S)$ с нормой

$$\langle\!\langle U\rangle\!\rangle_{m,k,\gamma}^2 = \int\limits_{\operatorname{Re} p=\gamma} (\langle\!\langle U(-,p)\rangle\!\rangle_{m,\gamma} + |\tau|^{2k}\langle\!\langle U(-,p)\rangle\!\rangle_0^2)\,dp.$$

Пространства $E_{1,\gamma}^{m,1/2m}$ были введены в (2); пространства $E_{\alpha,\gamma}^{m,k}(\mathscr{D})$ построены с помощью $H_\alpha{}^m(\mathscr{D})$ по тому же принципу.

Рассмотрим в $\mathscr{D}$ граничную задачу с комплексным параметром p:

$$\begin{aligned} &L(x,\partial_x)U - pU = F(x,p), \quad x\in\mathscr{D};\\ &B(x,\partial_x,p)U|_{x=x'} = G(x',p), \quad x'\in S. \end{aligned} \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1—4 и вырожденный порядок m' граничного оператора B на S не превосходит $m-2$.*

Тогда существует такое $\gamma>0$, что при всех p, $\operatorname{Re} p\geqslant\gamma$, задача (5) *имеет единственное решение в $E_{\alpha,\gamma}^{m,1/2m}(\mathscr{D})$ при любых $F(x,p)\in E_{\alpha,\gamma}^{m-2,1/2m}(D)$ и $G(x',p)\in E_{1,\gamma}^{\lambda,1/2(\lambda+1)}(S)$, $\lambda=m-m'-1$. Это решение удовлетворяет априорной оценке*

$$\|U\|_{m,\alpha,1/2m,\gamma}\leqslant c'(\|F\|_{m-2,\alpha,1/2m,\gamma}+\langle\!\langle G\rangle\!\rangle_{\lambda,1/2(\lambda+1),\gamma}) \tag{6}$$

с постоянной $c'>0$, не зависящей от p и от функций.

Возвращаясь к задаче (1)—(3), введем функциональные пространства $H_{\alpha,\gamma}^{m,k}(Q)$ и $H_{1,\gamma}^{m,k}(\Gamma)$. Функция $u(x,t)$ принадлежит пространству $H_{\alpha,\gamma}^{m,k}(Q)$, если: а) при почти всех $x\in\mathscr{D}$ функция $u_\gamma(x,t)$, равная $e^{-\gamma t}u(x,t)$ при $t\geqslant 0$ и равная нулю при $t<0$, принадлежит пространству $H^k(-\infty<t<\infty)$, т. е. обобщенные производные по t функции $u_\gamma(x,t)$ до порядка $[k]$ принадлежат $\mathscr{L}_2(-\infty<t<\infty)$, и при нецелом k

$$\|\partial_t^{[k]}u_\gamma\|_{k-[k]}^2 \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\partial_t^{[k]}u_\gamma(x,t+h)-\partial_t^{[k]}u_\gamma(x,t)|^2|h|^{-1-2(k-[k])}dh\,dt<\infty;$$

б) при почти всех $t\in(0,\infty)$ функция $u(x,t)$ принадлежит пространству $H_\alpha{}^m(\mathscr{D})$; в) конечна норма

$$\begin{aligned} |\!|\!|u|\!|\!|_{m,\alpha,k,\gamma}^2 = \int\limits_0^\infty \|u_\gamma(-,t)\|_{m,\alpha}^2 dt + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathscr{D}}\sum_{s=0}^{[k]}|\partial_t^s u_\gamma(x,t)|^2 dx\,dt +\\ + \int\limits_{\mathscr{D}}\|\partial_t^{[k]}u_\gamma(x,-)\|_{k-[k]}^2\,dx. \end{aligned} \tag{7}$$

При целом k последнее слагаемое в правой части (7) опускается. Аналогично определяется пространство $H_{1,\gamma}^{m,l}(\Gamma)$, норма в котором имеет вид

$$\begin{aligned} \langle\langle\langle w\rangle\rangle\rangle_{m,k,\gamma}^2 = \int\limits_0^\infty \langle\!\langle w_\gamma(-,t)\rangle\!\rangle_m^2 dt + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_S\sum_{s=0}^{[k]}|\partial_t^s w_\gamma(x',t)|^2 dx'\,dt +\\ + \int\limits_S\|\partial_t^{[k]}w_\gamma(x',-)\|_{k-[k]}^2\,dx'. \end{aligned}$$

Преобразование Лапласа устанавливает изоморфное взаимно непрерывное соответствие между пространствами $E^{m,k}_{\alpha,\gamma}(\mathscr{L})$ и $H^{m,k}_{\alpha,\gamma}(Q)$ $(E^{m,k}_{1,\gamma}(S)$ и $H^{m,k}_{\alpha,\gamma}(\Gamma))$. Это позволяет из теоремы 1 вывести следующую теорему.

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы 1 существует такое число $\gamma > 0$, что задача* (1)—(3) *однозначно разрешима в* $H^{m,\,{}^1\!/_{2m}}_{\alpha,\gamma}(Q)$ *при любых правых частях* $f \in H^{m-2,\,{}^1\!/_{2m}}_{\alpha,\gamma}(Q)$ *и* $g \in H^{\lambda,\,{}^1\!/_2(\lambda+1)}_{1,\gamma}(\Gamma)$, $\lambda = m - m' - 1$. *Из оценки* (6) *при этом вытекает априорная оценка решений задачи* (1)—(3) *из* $H^{m,\,{}^1\!/_{2m}}_{\alpha,\gamma}(Q)$:

$$|||u|||_{m,\,\alpha,\,{}^1\!/_{2m},\,\gamma} \leqslant c_1\left(|||f|||_{m-2,\,\alpha,\,{}^1\!/_{2m},\,\gamma} + \langle\langle\langle g\rangle\rangle\rangle_{\lambda,\,{}^1\!/_2(\lambda+1),\,\gamma}\right).$$

Теорема 2 может быть обобщена на тот случай, когда: 1) условие (3) неоднородно; 2) граница S состоит из конечного числа замкнутых непересекающихся компонент, на каждой либо оператор L не вырождается, либо вырождается так, что выполнены условия 1 и 2; 3) величина $K[\alpha^2]$ в условии 1 отлична от нуля на S; 4) коэффициенты операторов L и B, граница S имеют конечную гладкость.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
10 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Глушко, Тр. Московск. матем. общ., **23**, 113 (1970). [2] М. С. Агранович, М. И. Вишик, УМН, **19**, в. 3, 53 (1964). [3] I. I. Kohn, L. Nirenberg, Comm. Pure and Appl. Math., **18**, № 3, 443 (1965). Дж. Дж. Кон, Л. Ниренберг, Сборн. статей Псевдодифференциальные операторы, М., 1967, стр. 88. [4] О. А. Олейник, Матем. сборн., **69** (111), 1 (1966). [5] В. П. Глушко, ДАН, **187**, № 2, 245 (1969).