

УДК 539.376:517.43

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Э. И. ГОЛЬДЕНГЕРШЕЛЬ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЭЙЛЕРУ ВЯЗКО-УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 6 IX 1971)

Пусть тонкий вязко-упругий стержень переменного сечения конечной длины l , один конец которого свободен, а второй зашпелен, находится под действием продольной сжимающей силы P , приложенной к свободному концу. Пусть, кроме того, на стержень действует поперечная сила, изгибающий момент которой в сечении с абсциссой x обозначим через $p(x, t)$.

Выберем начало координат в свободном конце стержня и будем предполагать, что в начальный момент ось стержня расположена вдоль оси x . Момент начала нагружения выбираем при $t = 0$.

Тогда прогиб $y(x, t)$ оси стержня будет описываться следующей краевой задачей ^(9, 7, 10):

$$-EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - Py - P \int_0^t K(t, \tau) y(x, \tau) d\tau = p(x, t) + \int_0^t K(t, \tau) p(x, \tau) d\tau; \quad (1)$$

$$y(0, t) = 0, \quad y'(l, t) = 0;$$

Здесь $K(t, \tau)$ — ядро ползучести материала стержня, $I(x)$ — момент инерции поперечного сечения с абсциссой x , E — мгновенный модуль упругости.

Обозначим через V вольтерров оператор с ядром $K(t, \tau)$, фигурирующий в (1).

Условимся говорить, что при данном P краевая задача (1) устойчива по Эйлеру с весом $e^{-\theta t}$ (т. е. стержень устойчив по Эйлеру с весом $e^{-\theta t}$), если существование равномерного по $x \in [0, l]$ предела

$$(Lp)(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t) e^{-\theta t}$$

влечет за собой существование равномерного по $x \in [0, l]$ предела

$$(Ly)(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(x, t) e^{-\theta t}.$$

Будем называть P_0 критическим значением силы для задачи (1), соответствующим весу $e^{-\theta t}$, если при всех $P < P_0$ имеет место устойчивость по Эйлеру с весом $e^{-\theta t}$, а при $P = P_0$ это уже не имеет места.

Применяя метод работы ⁽⁵⁾, основанный на тауберовых теоремах типа Пэли — Винера — Гельфанда ⁽¹⁻⁴⁾, можно получить следующее утверждение.

Теорема. Пусть

$$K(t, \tau) = K_0(t - \tau) + \tilde{K}(t, \tau),$$

причем

$$1) K_0(t) \geq 0, \quad t \geq 0;$$

$$2) k_0(\theta) = \int_0^\infty K_0(t) e^{-\theta t} dt < \infty;$$

3) $k_0(w)$ принимает вещественные значения только на вещественной оси;

$$4) \sup_{0 \leq t < \infty} \int_0^t |\tilde{K}(t, \tau)| e^{-\theta(t-\tau)} d\tau < \infty;$$

5) $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Delta} \tilde{K}(t, \tau) e^{-\theta(t-\tau)} d\tau = 0$ для любого измеримого ограниченного множества $\Delta \subset [0, \infty]$;

$$6) \lim_{s \rightarrow \infty} \sup_{t \geq s} \int_s^t |\tilde{K}(t, \tau)| e^{-\theta(t-\tau)} d\tau = 0.$$

Тогда критическая сила P_0 определяется выражением

$$P_0 = P_0 / (1 + k_0(\theta)), \quad (2)$$

где P_0 — эйлерова критическая сила для упругой задачи, соответствующей задаче (1).

При $P < P_0$ предельный прогиб $(Ly)(x)$ является решением следующей краевой задачи

$$-EI(x) \frac{d^2(Ly)}{dx^2} - P(1 + k_0(\theta))Ly = (1 + k_0(\theta))Lp,$$

$$(Ly)|_{x=0} = (Ly)'|_{x=l} = 0,$$

т. е. задачи, получающейся из (1) заменой y на Ly , p — на Lp , оператора V — оператором умножения на $k_0(\theta)$ *.

Эта теорема дает обоснование так называемого метода расчета на ползучесть по длительному модулю для вязко-упругого стержня. Для вязко-упругой балки обоснование этого метода неявно содержится в нашей работе (5).

Заметим, что ядро Н. Х. Арутюняна (6)

$$K(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\gamma_{\infty} + \frac{c}{\tau} \right) (1 - e^{-\delta(t-\tau)}) \quad (3)$$

удовлетворяет условиям нашей теоремы при $\theta = 0$.

Теоретическому исследованию задачи об устойчивости линейно-вязко-упругих стержней посвящены работы (7, 8). В частном случае, когда $K(t, \tau)$ имеет вид (3) и $\theta = 0$, в работе (7) для критической силы P_0 получено выражение (2).

Замечание. При $\theta = 0$ механический смысл нашего определения устойчивости по Эйлеру вязко-упругого стержня ясен: стержень устойчив по Эйлеру, если стабилизирующейся при $t \rightarrow \infty$ нагрузке отвечает стабилизирующийся прогиб. Если метод расчета на ползучесть по длительному модулю применим, то исчезающей при $t \rightarrow \infty$ нагрузке отвечает исчезающий прогиб.

Согласно доказанной нами теореме, при $P < P_0$ устойчивость по Эйлеру в смысле данного нами определения и правомерность метода расчета на ползучесть по длительному модулю имеют место одновременно и это показывает, что наше определение устойчивости по Эйлеру является естественным перенесением на вязко-упругий случай эйлерова определения устойчивости для упругого стержня.

Возможность оперировать с произвольным экспоненциальным весом $e^{-\theta t}$ позволяет получать характеристику асимптотического поведения при

* Можно показать, что эта теорема остается верной, если каждый из концов стержня или заделан, или шарнирно закреплен, или свободно оперт.

$t \rightarrow \infty$ прогиба в зависимости от асимптотического поведения поперечной нагрузки.

Работа докладывалась на семинаре кафедры теории упругости Ленинградского государственного университета.

Пользуюсь случаем выразить сердечную признательность С. Г. Михлину за полезную дискуссию.

Институт горного дела им. А. А. Скочинского
Москва

Поступило
31 VIII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Винер, Р. Пэли, Преобразование Фурье в комплексной области, «Наука», 1964. ² И. М. Гельфанд, Матем. сборн., 9(51), 51 (1941). ³ Э. И. Гольденгершель, ДАН, 129, № 5, 971 (1959). ⁴ Э. И. Гольденгершель, Матем. сборн., 64, 1, 115 (1964). ⁵ Э. И. Гольденгершель, ДАН, 195, № 4, 797 (1970). ⁶ Н. Х. Арутюнян, Некоторые вопросы теории ползучести, 1952. ⁷ J. N. Distefano, J. Struct. Division Proc. Am. Soc. Civil Eng., 91, 3, 127 (1965). ⁸ Д. Сакмен, Ракетная техника и космонавтика, 5, 9, 229 (1967). ⁹ С. П. Тимошенко, Теория упругости, 1937. ¹⁰ Ю. Н. Работнов, Ползучесть элементов конструкций, «Наука», 1966.