

В. Б. ГОРСКИЙ

БЕЗВИХРЕВЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

(Представлено академиком Л. И. Седовым 27 III 1972)

В ⁽¹⁾ было показано, что релятивистские стационарные адиабатические движения идеального газа можно свести к нерелятивистскому движению некоторого «вспомогательного» газа и тем самым перенести многие результаты обычной гидродинамики на релятивистскую. В данной работе исследуются безвихревые установившиеся течения идеального газа в рамках специальной теории относительности. На основе теории малых возмущений получены приближенные уравнения дозвуковых, сверхзвуковых и транзвуковых потоков в плоском, осесимметричном и пространственном случаях и найдены соответствующие законы подобия.

Рассмотрим релятивистские движения идеального газа в четырехмерном пространстве — времени с метрикой $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$. Здесь g_{ik} — метрический тензор с сигнатурой $+- - -$, латинские индексы i, k пробегают значения от 0 до 3, а греческие индексы — от 1 до 3, причем $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$; c — скорость света, t — время, x, y, z — пространственные координаты. Уравнения движения газа содержатся в законах сохранения энергии — импульса ⁽²⁻³⁾

$$\partial T_{ik} / \partial x_k = 0, \quad T_{ik} = \rho c^2 f u_i u_k - p g_{ik}, \quad f = 1 + H / c^2, \quad (1)$$

где T_{ik} — 4-тензор энергии — импульса газа, $u_i = (\gamma, \gamma c^{-1} v_x, \gamma c^{-1} v_y, \gamma c^{-1} v_z)$ — 4-скорость, p — давление, $\gamma = (1 - q^2 c^{-2})^{-1/2}$; q, v_x, v_y, v_z — модуль и компоненты обычной 3-скорости; ρ — плотность массы покоя, приходящейся на единицу собственного объема газа; H — удельная энтальпия. Кроме того, уравнения (1) должны быть дополнены уравнением неразрывности $\partial(\rho u^k) / \partial x^k = 0$.

Будем далее рассматривать установившиеся изэнтропические течения. Их можно считать безвихревыми ⁽⁶⁾. А так как здесь во всем объеме газа выполняется интеграл Бернулли ⁽²⁻⁵⁾

$$f \cdot \gamma = f_0 = \text{const}, \quad f_0 = f_{q=0}, \quad (2)$$

то условия безвихревости можно записать в виде ⁽⁷⁾

$$\partial(f_0 v_\alpha) / \partial x_\beta - \partial(f_0 v_\beta) / \partial x_\alpha = 0. \quad (3)$$

Добавляя сюда условие изэнтропичности и представляя уравнение неразрывности для установившихся течений в компонентах 3-скорости

$$p / \rho^k = \text{const}, \quad (4)$$

$$\partial(\rho \gamma v^\alpha) / \partial x^\alpha = 0, \quad (5)$$

получим замкнутую систему уравнений (2) — (5), описывающую изучаемые потоки в обычном евклидовом пространстве для 3-скорости (здесь в ниже k — показатель адиабаты). Но при наших предположениях скорость звука a и энтальпия H имеют вид ^(2, 5)

$$a^2 = \frac{1}{f} \frac{dp}{d\rho} = \frac{k p}{f \rho}, \quad H = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}. \quad (6)$$

Поэтому можно получить точные уравнения движения в компонентах скорости, для потенциала или функции тока.

Найдем эти уравнения сначала для плоского ($n=0$) и осесимметричного ($n=1$) течений, где (3) и (5) примут вид

$$\partial(f_0 v_x) / \partial y - \partial(f_0 v_y) / \partial x = 0, \quad (7)$$

$$\partial(\rho \gamma y^n v_x) / \partial x + \partial(\rho \gamma y^n v_y) / \partial y = 0. \quad (8)$$

Раскрывая (8) с помощью (2) и (6), получаем точное уравнение движения в компонентах скорости

$$(Q - v_x^2) \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_x v_y \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - (Q - v_y^2) \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{n}{y} Q v_y = 0, \\ Q = \gamma^2 (a^2 - c^2), \quad (9)$$

которое должно решаться совместно с (7). При введении же из (7) потенциала скорости Φ ($\text{grad } \Phi = f_0 \cdot \bar{q}$) уравнение (9) примет вид

$$(Q f_0^2 - \Phi_x^2) \Phi_{xx} - 2 \Phi_x \Phi_y \Phi_{xy} + (Q f_0^2 - \Phi_y^2) \Phi_{yy} + \frac{n}{y} Q f_0^2 \Phi_y = 0. \quad (10)$$

Если же ввести из (8) функцию тока Ψ и подставить в (7), то находим точное уравнение движения для Ψ

$$\Psi_x^2 \Phi_{xx} + 2 \Psi_x \Psi_y \Phi_{xy} - \Psi_y^2 \Phi_{yy} = \\ = L (\Psi_x^2 + \Psi_y^2) (\Psi_{xx} + \Psi_{yy}) + \frac{n}{y} (1 - L) \Psi_x (\Psi_x^2 + \Psi_y^2), \quad (11)$$

где $L = 1 + \gamma^2 q^{-2} (c^2 - a^2)^{-1}$. Заметим, что уравнения, подобные (10), были впервые получены в (7, 8).

Совершенно аналогично получаются из (2) — (6) точные уравнения пространственных течений в компонентах скорости и для потенциала Φ :

$$(Q - v_x^2) \frac{\partial v_x}{\partial x} + (Q - v_y^2) \frac{\partial v_y}{\partial y} + (Q - v_z^2) \frac{\partial v_z}{\partial z} - v_x v_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) - \\ - v_x v_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - v_y v_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = 0, \quad (12) \\ (Q f_0^2 - \Phi_x^2) \Phi_{xx} + (Q f_0^2 - \Phi_y^2) \Phi_{yy} + (Q f_0^2 - \Phi_z^2) \Phi_{zz} - 2 \Phi_x \Phi_y \Phi_{xy} - \\ - 2 \Phi_x \Phi_z \Phi_{xz} - 2 \Phi_y \Phi_z \Phi_{yz} = 0,$$

причем первое уравнение из (12) должно рассматриваться совместно с (3).

Упростим теперь уравнения (9) — (12) с помощью теории малых возмущений в дозвуковом, сверхзвуковом и транзвуковом диапазонах скорости. Для этого считаем, что на однородный поток со скоростью q_∞ , параллельной оси x , накладывается малое возмущение, так что

$$v_x = q_\infty (1 + u), \quad v_y = q_\infty v, \quad v_z = q_\infty w; \quad u, v, w \ll 1. \quad (13)$$

Введем предположение, что $\gamma_\infty^2 u \ll 1$, где $\gamma_\infty^2 = (1 - q_\infty^2 c^{-2})^{-1}$.

Кроме того, из (6) и (2) можно получить формулы для a и числа Маха M

$$a^2 = \frac{c^2 (k-1) (j-1)}{f}, \quad M^2 = \frac{q^2}{Q^2} = \frac{f (1 - \gamma^2)}{(k-1) (j-1)}. \quad (14)$$

Для дозвуковых и сверхзвуковых течений положим $u = O(v) = O(w)$ и проведем опять исследование вначале для плоского ($n=0$), и осесимметричного ($n=1$) случаев. Подставляя (13) в (9) и (7), используя (14),

и ограничиваясь ведущими членами, получим при $M \geq 1$ приближенные уравнения движения

$$(1 - M_\infty^2) \gamma_\infty^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + n \frac{v}{y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad M_\infty = \frac{q_\infty}{a_\infty}, \quad (15)$$

которые можно свести к одному уравнению для потенциала φ ($u = \varphi_x$, $v = \varphi_y$) или функции тока ψ скорости возмущения ($v = -y^{-n}\psi_x$, $u = y^{-n}\gamma_\infty^{-2}(1 - M_\infty^2)^{-1}\psi_y$):

$$(1 - M_\infty^2) \gamma_\infty^2 \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \frac{n}{y} \varphi_y = 0, \quad (16)$$

$$(1 - M_\infty^2) \gamma_\infty^2 \psi_{xx} + \psi_{yy} - \frac{n}{y} \psi_y = 0. \quad (17)$$

Для трансзвуковых течений, используя оценки ⁽⁹⁾ $v = O(w) = O(u^{1/2})$, $y = O(z) = O(u^{-1/2})$, $x = O(1)$, находим из (9) и (7) приближенные уравнения в форме

$$N \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + n \frac{v}{y} = R M_\infty^2 u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad N = (1 - M_\infty^2) \gamma_\infty^2, \\ R = \gamma_\infty^4 (k - 2 + 3\gamma_\infty^{-2}). \quad (18)$$

При введении же потенциала φ или функции тока ψ скорости возмущения ($u = \varphi_x = -2R^{-1}y^{-n}\psi_y$, $v = \varphi_y = -y^{-n}\psi_x$) они сводятся к одному уравнению для φ или ψ :

$$N \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \frac{n}{y} \varphi_y = R M_\infty^2 \varphi_x \varphi_{xx}, \quad (19)$$

$$\pm \sqrt{-\frac{2}{y^k} R \psi_y \psi_{xx} - \psi_{yy} + \frac{n}{y} \psi_y} = 0, \quad (20)$$

где в (20) считается $M_\infty = 1$ и перед корнем знаки $\pm$ относятся к $M \geq 1$ соответственно.

Заметим, что в плоском случае ($n = 0$) упрощение уравнений движения для потенциала скорости проводилось также в ^(10, 11). При этом уравнение (16) для $n = 0$ точно совпадает с соответствующим уравнением в ⁽¹¹⁾, но отличается от ⁽¹⁰⁾. В трансзвуковом же случае уравнение (19) при $n = 0$ отличается и от ⁽¹⁰⁾, и от ⁽¹¹⁾. Различие объясняется тем, что в ^(10, 11) в указанных приближенных уравнениях не учтены некоторые слагаемые, имеющие тот же порядок, что и оставленные члены.

Далее, поскольку граничное условие на теле здесь остается таким же, как и в обычной гидродинамике, а коэффициент давления $c_p = (p - p_\infty) \times \times (1/2 \rho_\infty q_\infty^2)^{-1}$ при $n = 0$; 1 будет

$$c_p = -2f_\infty \gamma_\infty^2 (u + 1/2 n v^2),$$

то с помощью полученных уравнений для рассматриваемых релятивистских потоков несложно обобщить законы подобия. Так при $M \geq 1$ и $n = 0$; 1 получаем закон, обобщающий правило Гёттерта ⁽¹²⁾:

$$c_p = f_\infty |1 - M_\infty^2|^{-1} F(\tau | N^{1/2}),$$

где $y = \tau b F(x/b)$ — уравнение контура тела, τ — относительная толщина, b — хорда. Для плоских же околосзвуковых течений находим закон подобия, обобщающий правило Спрейтера ⁽¹²⁾:

$$c_p = \left(\frac{\tau^2 f_\infty^3 \gamma_\infty^6}{R M_\infty^2} \right)^{1/3} \cdot F \left(\frac{|N|}{(\tau R M_\infty^2)^{2/3}} \right),$$

где N, R даны в (18).

Совершенно аналогично получаются приближенные уравнения и законы подобия для пространственных потоков. Так, вместо (16) и (19) имеем

соответственно

$$N\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0, \quad N\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = RM_\infty^2 \varphi_x \varphi_{xx}.$$

При этом закон подобия при $M \gg 1$ для квазидвумерных тел $z = 0$ $\Rightarrow \tau b F(\frac{x}{b}, \frac{y}{l})$ с граничным условием $(\frac{\partial \varphi}{\partial z})_{z=0} = \tau b \frac{\partial F}{\partial x}$ можно представить в следующей общей форме:

$$c_D = Af_\infty \gamma_\infty^2 \cdot F\left(\frac{\tau}{A|N|^{1/2}}; \lambda|N|^{1/2}\right), \quad \lambda = \frac{l^2}{S}, \quad (21)$$

где A — произвольная постоянная, S — площадь тела. При $A = 1$, $A = |N|^{-1/2}$ из (21) получаются различные формы обобщенного правила Прандтля — Глауэрта, а при $A = |N|^{-1}$ — обобщенное правило Гёттерда для квазидвумерных тел ⁽¹²⁾. Для трансзвуковых же течений в этом случае получаем обобщенное правило Спрейтера ⁽¹²⁾ в виде

$$c_D = \left(\frac{\tau^2 f_\infty^3 \gamma_\infty^6}{RM_\infty^2}\right)^{1/3} \cdot F\left(\frac{|N|}{(\tau RM_\infty^2)^{1/3}}; \lambda|N|^{1/2}\right).$$

Следует подчеркнуть, что все полученные результаты в нерелятивистском пределе ($c \rightarrow \infty$) точно переходят в соответствующие формы уравнения обычной гидродинамики.

В заключение автор выражает благодарность акад. Л. И. Седова и И. С. Шикину за полезные замечания по работе.

Мордовский государственный университет
им. Н. П. Огарева
Саранск

Получено
23 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. С. Шикин, ДАН, **142**, № 2, 296 (1962). ² A. Taub, Phys. Rev., **74**, 325 (1948). ³ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., 1954.
- ⁴ К. П. Станюкович, Неустановившиеся движения сплошной среды, М., 1955.
- ⁵ A. Lichnerowicz, Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics, N. Y., 1967. ⁶ И. М. Халатников, ЖЭТФ, **27**, № 5, 529 (1954). ⁷ Ф. И. Франкль, ДАН, **123**, № 1, 47 (1958). ⁸ А. Арынов, ДАН, **125**, № 3, 512 (1959). ⁹ К. Гудерлей, Теория околосвуковых течений, М., 1960. ¹⁰ R. Truitt, Phys. Fluids, **11**, № 10, 2089 (1968). ¹¹ B. Todeschini, Meccanica, **5**, № 1, 17 (1970). ¹² Г. Липман, А. Рошко, Элементы газовой динамики, М., 1960.