Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 2

УДК 517.9 : 535.4 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

И. С. ГУДОВИЧ, С. Г. КРЕЙН, И. М. КУЛИКОВ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 17 I 1972)

В работах авторов ([1-4]) содержались отдельные результаты о разрешимости краевых задач для системы уравнений Максвелла. В настоящей статье излагается в более законченном виде вопрос о нётеровости общих краевых задач для уравнений Максвелла и подробно исследуется краевая задача Максвелла — Леонтовича.

1. В ограниченной односвязной области Ω трехмерного эвклидова пространства R_3 с достаточно гладкой границей S рассматривается система неоднородных уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}(x)+ik\mathbf{v}(x)=\mathbf{A}_1(x),\quad -\operatorname{rot}\mathbf{v}(x)+ik\mathbf{u}(x)=\mathbf{A}_2(x),\qquad (1)$$
$$\operatorname{div}\mathbf{v}(x)=g_1(x),\quad \operatorname{div}\mathbf{u}(x)=g_2(x),$$

где k — комплексное число.

Система уравнений (1) является переопределенной и не принадлежит к классическим типам систем, изученных в последние годы. Необходимым условием ее разрешимости являются соотношения

$$\operatorname{div}\mathbf{A}_1=ikg_1,\quad \operatorname{div}\mathbf{A}_2=ikg_2,\qquad (2)$$

называемые уравнениями непрерывности.

Следовательно, если систему (1) рассматривать, например, в одном из классических функциональных пространств, то заведомо правые части системы (1) должны располагаться в некотором его линейном подмногообразии. В связи с этим мы добавляем к нашей системе члены с новыми искомыми функциями так, чтобы для разрешимости новой системы не возникали априорные ограничения на правые части.

Итак, наряду с системой (1) рассмотрим расширенную систему

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\mathbf{u}(x)+ik\mathbf{v}(x)+\operatorname{grad}h(x)=\mathbf{A}_1(x),\\ -\operatorname{rot}\mathbf{v}(x)+ik\mathbf{u}(x)+\operatorname{grad}q(x)=\mathbf{A}_2(x),\qquad (3)\\ \operatorname{div}\mathbf{v}(x)=g_1(x),\quad \operatorname{div}\mathbf{u}(x)=g_2(x),\end{gathered}$$

причем для вновь введенных функций h и q будем требовать выполнения условий

$$h|_S=q|_S=0\qquad (4)$$

независимо от граничных условий на $\mathbf{v}(x)$ и $\mathbf{u}(x)$.

Лемма 1. *Система уравнений* (3) *является эллиптической в области* Ω.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия*

$$\int\limits_\Omega \mathbf{A}_j\operatorname{grad}\Psi_j\,d\Omega=ik\int\limits_\Omega g_j\Psi_j\,d\Omega,\quad j=1,2,\qquad (5)$$

где Ψ_1, Ψ_2 — *произвольные финитные, гладкие функции в области* Ω (*это есть условия* (2) *в смысле обобщенных функций*); *тогда всякое решение* *системы* (3) *с граничными условиями* (4) *порождает решение системы уравнений Максвелла* (1).

Рассмотрим системы граничных условий вида

$$\sum_{r=1}^{3} B_{jr}\left(x;\ -i\frac{\partial}{\partial\sigma_1};\ -i\frac{\partial}{\partial\sigma_2};\ -i\frac{\partial}{\partial n}\right)u_r(x)|_S +$$

$$+\sum_{r=1}^{3} C_{jr}\left(x;\ -i\frac{\partial}{\partial\sigma_1};\ -i\frac{\partial}{\partial\sigma_2};\ -i\frac{\partial}{\partial n}\right)v_r(x)|_S = \Phi_j(x)|_S,\qquad j=1,2, \tag{6}$$

где $\partial/\partial\sigma_j$ $(j=1, 2)$ — дифференцирования по касательным направлениям к поверхности S, $u_r(x)$, $v_r(x)$, $r=1, 2$,— проекции векторов $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{v}(x)$ на эти направления, $\partial/\partial n$ — дифференцирование по внешней нормали к S, $u_3(x)$, $v_3(x)$ — проекции $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{v}(x)$ на нормаль.

Обозначим через m_j порядок дифференцирования оператора в j-м уравнении (6).

Уравнения (1) и (6) порождают оператор $\mathfrak{A}$, ставящий в соответствие функциям $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ набор функций $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, g_1, g_2, Φ_1, Φ_2.

Определение. Задачу (1), (6) назовем эллиптической в подпространстве, если существует такое целое $l_0 \geqslant 0$, что при $l \geqslant l_0$ оператор $\mathfrak{A}$ является нётеровым как оператор из пространства $H^{l+1}(\Omega) = {}_1W_2^{l+1}(\Omega)\times W_2^{l+1}(\Omega)$ в подпространство $N^l(\Omega, S)$ пространства $H^l(\Omega, S) = W_2^l(\Omega)\times W_2^l(\Omega)\times W_2^l(\Omega)\times W_2^l(\Omega)\times W_2^{l-m_1+1/2}(S)\times W_2^{l-m_2+1/2}(S)$, состоящее из всех функций $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, g_1, g_2, \Phi_1, \Phi_2)$ из $H^l(\Omega, S)$, удовлетворяющих условию (2).

Лемма 3. *Если задача* (1), (6) *эллиптична в подпространстве, то расширенная задача* (3), (4), (6) *эллиптична.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству теоремы 5 из [4].

Используя теперь теорию разрешимости эллиптических краевых задач (см., например, [5]), мы получаем основную теорему.

Теорема 1. *Для того чтобы краевая задача* (1), (6) *была эллиптической в подпространстве, необходимо и достаточно, чтобы определитель*

$$\begin{vmatrix} \eta_1\overline{B}_{11}^0+\eta_2\overline{B}_{12}^0+\bar\eta_3\overline{B}_{13}^0 & \eta_1\overline{C}_{11}^0+\eta_2\overline{C}_{12}^0+\bar\eta_3\overline{C}_{13}^0 \\ \eta_1\overline{B}_{21}^0+\eta_2\overline{B}_{22}^0+\bar\eta_3\overline{B}_{23}^0 & \eta_1\overline{C}_{21}^0+\eta_2\overline{C}_{22}^0+\bar\eta_3\overline{C}_{23}^0 \end{vmatrix} \tag{7}$$

был отличен от нуля в любой точке границы S при любом ненулевом векторе (η_1, η_2) *и* $\bar\eta_3 = i(\eta_1^2+\eta_2^2)^{1/2}$. *При этом* $\overline{B}_{jr}{}^0 = B_{jr}{}^0(S, \eta_1, \eta_2, \bar\eta_3)$, $\overline{C}_{jr}{}^0 = C_{jr}{}^0(S, \eta_1, \eta_2, \bar\eta_3)$, *где* 0 *означает взятие главной части граничного дифференциального оператора.*

Примерами граничных условий, удовлетворяющих (7), являются 1) условия $v_n|_S=0$, $u_n|_S=0$; 2) неоднородное граничное условие М. Л. Леонтовича

$$[\mathbf{v}_\tau - \alpha(\mathbf{u}\times\mathbf{n})]|_S = (\mathbf{\Phi}\times\mathbf{n})|_S,\quad \alpha\neq 0. \tag{8}$$

Отметим, что в условиях теоремы 1 справедливо неравенство коэрцитивности

$$\|\mathbf{v}\|^2_{W_2^{l+1}(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|^2_{W_2^{l+1}(\Omega)} \leqslant M\Big\{\sum_{j=1}^{2}[\|\mathbf{A}_j\|^2_{W_2^l(\Omega)} +$$

$$+\|g_j\|^2_{W_2^l(\Omega)} + \|\Phi_j\|^2_{W_2^{l-m_j+1/2}(S)}] + \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)}\Big\},$$

где $l \geqslant \max\{m_1;\ m_2\}$, $S \in C^{l+1}$, а коэффициенты операторов B_{jr}, C_{jr}, $j = 1, 2$; $r = 1, 2, 3$, принадлежат классам $C^{l-m_j+1/2+\varepsilon}(S)$ со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$.

2. Рассмотрим подробнее краевую задачу Максвелла — Леонтовича (1), (8) и соответствующую ей расширенную задачу (3), (4), (8).

Нетрудно показать, что для любых непрерывно дифференцируемых функций $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, h, q, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_1$, h_1, q_1 имеет место следующая формула Грина:

$$\int_\Omega [(\operatorname{rot} \mathbf{u} + ik\mathbf{v} + \operatorname{grad} h)\mathbf{v}_1^* + (-\operatorname{rot}\mathbf{v} + ik\mathbf{u} + \operatorname{grad} q)\mathbf{u}_1^*]\, d\Omega +$$

$$+ \int_\Omega (q_1^* \operatorname{div}\mathbf{u} + h_1^* \operatorname{div}\mathbf{v})\, d\Omega = \int_\Omega (-h \operatorname{div}\mathbf{v}_1^* - q \operatorname{div}\mathbf{u}_1^*)\, d\Omega +$$

$$+ \int_\Omega [(-\operatorname{rot}\mathbf{u}_1^* + ik\mathbf{v}_1^* - \operatorname{grad} h_1^*)\mathbf{v} + (\operatorname{rot}\mathbf{v}_1^* + ik\mathbf{u}_1^* - \operatorname{grad} q_1^*)\mathbf{u}]\, d\Omega +$$

$$+ \frac{1}{\alpha}\int_S \mathbf{v}_1^* [\mathbf{v}_\tau - \alpha(\mathbf{u}\times\mathbf{n})]\, dS - \frac{1}{\alpha}\int_S \mathbf{v}[\mathbf{v}_{1\tau}^* + \alpha(\mathbf{u}_1^*\times\mathbf{n})]\, dS +$$

$$+ \int_S (q_1^* u_n + h_1^* v_n)\, dS + \int_S (h v_{1n}^* + q u_{1n}^*)\, dS.$$

Несмотря на то, что граничные условия (4), (8) не являются нормальными, пользуясь формулой Грина, можно найти сопряженную задачу к задаче (3), (4), (8)

$$-\operatorname{rot}\mathbf{u}_1 - ik^*\mathbf{v}_1 - \operatorname{grad} h_1 = \mathbf{B}_1, \quad \operatorname{rot}\mathbf{v}_1 - ik^*\mathbf{u}_1 - \operatorname{grad} q_1 = \mathbf{B}_2, \tag{9}$$

$$-\operatorname{div}\mathbf{v}_1 = f_1, \quad -\operatorname{div}\mathbf{u}_1 = f_2 \quad \text{в } \Omega,$$

$$\left.\begin{aligned} &[\mathbf{v}_{1\tau} + \alpha^*(\mathbf{u}_1\times\mathbf{n})]|_S = (\mathbf{\Phi}_1\times\mathbf{n})|_S, \\ &-h_1|_S = \mu_1, \quad -q_1|_S = \mu_2. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Краевая задача (9), (10) является эллиптической.

Справедливо утверждение об однозначной и полной разрешимости расширенной задачи Максвелла — Леонтовича.

Теорема 2. *Если* $\operatorname{Im} k > 0$ *и* $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 0$ $(\operatorname{Im} k < 0,\ \operatorname{Re}\alpha \leqslant 0)$ *или если k вещественно и k^2 не является собственным значением для системы уравнений*

$$\Delta\mathbf{v} + \lambda\mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \quad \text{в } \Omega$$

при граничном условии $\mathbf{v}|_S = 0$ *при* $\operatorname{Re}\alpha \neq 0$ *или при граничном условии*

$$\left[\mathbf{v}_\tau - \alpha\left(\frac{1}{i\sqrt{\lambda}}\operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{n}\right)\right]\Big|_S = 0,$$

если $\operatorname{Re}\alpha = 0$, *то краевая задача* (3), (4), (8) *разрешима единственным образом в* $\mathbf{W}_2^{l+1}(\Omega)\times\mathbf{W}_2^{l+1}(\Omega)\times W_2^{l+1}(\Omega)\times W_2^{l+1}(\Omega)$ *при любых правых частях* $(\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\ g_1,\ g_2,\ \mathbf{\Phi}\times\mathbf{n}) \in \mathbf{W}_2^l(\Omega)\times\mathbf{W}_2^l(\Omega)\times W_2^l(\Omega)\times W_2^l(\Omega)\times \mathbf{W}_2^{l+1/2}(S)$, *причем для решения этой задачи имеет место неравенство коэрцитивности*

$$\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{W}_2^{l+1}(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{W}_2^{l+1}(\Omega)} + \|h\|^2_{W_2^{l+1}(\Omega)} + \|q\|^2_{W_2^{l+1}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant M\left\{\sum_{j=1}^{2}[\|\mathbf{A}_j\|^2_{\mathbf{W}_2^l(\Omega)} + \|g_j\|^2_{W_2^l(\Omega)}] + \|\mathbf{\Phi}\times\mathbf{n}\|^2_{\mathbf{W}_2^{l+1/2}(S)}\right\},$$

где $l \geqslant 0$ *и* $S \in C^{l+1}$.

Спектр оператора, отвечающего граничной задаче

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}-\lambda\mathbf{v}=\mathbf{A}_1,\quad -\operatorname{rot}\mathbf{v}-\lambda\mathbf{u}=\mathbf{A}_2, \qquad (11)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\operatorname{div}\mathbf{u}=\operatorname{div}\mathbf{A}_1=\operatorname{div}\mathbf{A}_2=0 \quad \text{в } \Omega,$$

$$[\mathbf{v}_\tau-\alpha(\mathbf{u}\times\mathbf{n})]|_S=0,\quad \alpha\neq 0, \qquad (12)$$

является чисто точечным. Он может быть расположен только или в левой комплексной полуплоскости в случае $\operatorname{Re}\alpha>0$ ***или на мнимой оси для случая*** $\operatorname{Re}\alpha=0$. *Нуль не является точкой этого спектра.*

Приведем утверждения для частных случаев задачи (3), (4), (8):

1) краевая задача для уравнений (11) с $\lambda=0$ при граничном условии (8) имеет единственное решение в пространстве $\mathbf{W}_2^{l+1}(\Omega)\times\mathbf{W}_2^{l+2}(\Omega)$ при любой вектор-функции $\mathbf{\Phi}$, для которой $\mathbf{\Phi}\times\mathbf{n}\in\mathbf{W}_2^{l+1/2}(S)$, $l\geqslant 0$, $S\in C^{l+1}$;

2) при всякой вектор-функции $\mathbf{\Phi}$, для которой $\mathbf{\Phi}\times\mathbf{n}\in W_2^{l+1/2}(S)$, $l\geqslant 0$, $S\in C^{l+1}$, существует решение системы уравнений

$$\Delta\varphi_j=0,\quad j=1,2,$$

удовлетворяющее условиям

$$[(\operatorname{grad}\varphi_1)_\tau-\alpha(\operatorname{grad}\varphi_2\times\mathbf{n})]|_S=(\mathbf{\Phi}\times\mathbf{n})|_S,\quad \alpha\neq 0,$$

в пространстве $W_2^{l+2}(\Omega)\times W_2^{l+2}(\Omega)$, причем это решение определяется единственным образом с точностью до постоянных слагаемых;

3) пусть выполнены все условия теоремы 2 и и условия (5), тогда краевая задача (1), (12) разрешима единственным образом в

$$\mathbf{W}_2^{l+1}(\Omega)\times\mathbf{W}_2^{l+1}(\Omega),\quad l\geqslant 0.$$

Воронежский государственный университет им. Ленинского комсомола

Поступило 13 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Крейн, И. М. Куликов, Дифференциальные уравнения, **5**, № 7, 1275 (1969). [2] И. М. Куликов, И. С. Тециевская, Сборн. работ аспирантов по математике и механике, Воронежск. гос. унив., 1969. [3] И. М. Куликов, Краевые задачи для уравнений Максвелла. Оператор Максвелла — Леонтовича. Кандидатская диссертация, Воронеж, 1970. [4] И. С. Гудович, С. Г. Крейн, Матем. сборн., **84** (126), № 4, 595 (1971). [5] А. Р. Волевич, Матем. сборн., **68** (110), № 3, 373 (1965). [6] В. А. Солонников, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **92**, 233 (1966).