

С. И. ГУСЕВ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ АПОСТЕРИОРНЫХ СРЕДНИХ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 10 IV 1972)

Пусть (X, B) — измеримое пространство и $P_\theta, \theta \in \Theta$, — семейство распределений на нем. Мы будем предполагать Θ открытым множеством вещественной прямой, а меры P_θ — абсолютно непрерывными относительно некоторой σ -конечной меры ν . Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — повторная выборка из генеральной совокупности с распределением P_{θ_0} , где $\theta_0 \in \Theta$ — неизвестное значение параметра. Положим $f(x, \theta) = dP_\theta / d\nu$.

Цель настоящей работы — исследование асимптотического поведения при $n \rightarrow \infty$ оценок

$$\tilde{\theta}_n = \int_{\Theta} \theta \prod_{j=1}^n f(x_j, \theta) \pi(\theta) d\theta / \int_{\Theta} \prod_{j=1}^n f(x_j, \theta) \pi(\theta) d\theta,$$

которые мы, следуя И. А. Ибрагимову и Р. З. Хасьминскому ⁽¹⁾, будем называть обобщенными байесовскими апостериорными средними в ситуации, когда θ_0 не есть случайная величина, а функция π не обязана быть плотностью распределения. И. А. Ибрагимов и Р. З. Хасьминский получили несколько членов асимптотических разложений для статистики $\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta_0)$, для ее первых двух моментов и оценили скорость сходимости ее распределения к нормальному распределению (некоторые из этих результатов содержатся в ⁽¹⁾). При этом предполагалось, что $f(x, \theta) = f(x - \theta)$, $\pi \equiv 1$, а ν есть мера Лебега, т. е. рассматривался случай оценки Питмена. Кроме того, предполагалось, что f нигде не обращается в нуль. Здесь мы откажемся от этих ограничений и, пользуясь методом работы ⁽¹⁾, получим произвольное число членов асимптотических разложений.

Относительно функций $f(x, \theta)$ и $\pi(\theta)$ предположим следующее (символами E_θ и D_θ обозначены соответственно математическое ожидание и дисперсия по мере P_θ , буквой K обозначен произвольный компакт в Θ).

1) $f(x, \theta)$ измерима относительно $B \times \Lambda$. Здесь Λ — σ -алгебра всех измеримых по Лебегу подмножеств Θ .

2) Для $\theta \neq \lambda$

$$\int_X |f(x, \theta) - f(x, \lambda)| \nu(dx) > 0.$$

3) $\forall x \in X$ $f(x, \theta)$ определена и непрерывна на Θ^c и $k+2$ раз ($k \geq 1$) непрерывно дифференцируема на Θ^* .

4) а) $\sup_{\theta \in K} E_\theta |l_1(x_1, \theta)|^{k+1+\alpha} < \infty$ для некоторого $\alpha > 0$;

б) $\sup_{\theta \in K} E_\theta |l_i(x_1, \theta)|^{k+1} < \infty$ для $i = 2, \dots, k+1$;

в) $\sup_{\lambda, \theta \in K} E_\lambda |l_{k+2}(x_1, \theta)|^{k+1} < \infty \quad \forall K \subset \Theta,$

* Символом Θ^c обозначено замыкание Θ в R^1 .

где

$$l_i(x, \theta) = \begin{cases} \frac{\partial^i}{\partial \theta^i} \ln f(x, \theta), & \text{если } f(x, \theta) \neq 0, \\ 0, & \text{если } f(x, \theta) = 0. \end{cases}$$

$$5) \quad a) \inf_{\theta \in K} D_\theta l_i(x_1, \theta) > 0 \text{ для } i = 1, \dots, k+1;$$

$$b) \inf_{\lambda, \theta \in K} D_\lambda l_{k+2}(x_1, \theta) > 0 \quad \forall K \subset \Theta.$$

$$6) \quad a) I(\theta) = E_\theta |l_1(x_1, \theta)|^2 = \int_{\{x: f(x, \theta) \neq 0\}} |f'_\theta(x, \theta)|^2 / f(x, \theta) v(dx) -$$

непрерывная функция на Θ^c .

$$b) \text{ Для некоторого } p \geq 0$$

$$\sup_{\theta \in \Theta} (1 + |\theta|^p)^{-1} I(\theta) < \infty.$$

$$7) \quad E_\theta l_1(x_1, \theta) = 0, \quad E_\theta l_2(x_1, \theta) = -I(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta.$$

$$8) \text{ Для некоторого } q > 0$$

$$\sup_{\lambda, \theta \in \Theta} |\theta - \lambda|^q \int_X \sqrt{f(x, \theta) f(x, \lambda)} v(dx) < \infty.$$

$$9) \quad a) \pi(\theta) = 0 \text{ для } \theta \notin \Theta;$$

$$b) \pi \text{ } k \text{ раз непрерывно дифференцируема на } \Theta;$$

$$c) \pi(\theta) \neq 0 \text{ для } \theta \in \Theta.$$

$$10) \text{ Для некоторого } r \geq 0$$

$$\sup_{\theta \in \Theta} (1 + |\theta|^r)^{-1} |\pi(\theta)| < \infty.$$

Заметим, что приведенный список условий включает в себя условия И. А. Ибрагимова и Р. З. Хасьминского ⁽²⁾.

Прежде чем формулировать теоремы, условимся о следующих обозначениях: $P_\theta^\infty = P_\theta \times P_\theta \times \dots$ — прямое произведение мер, $B^\infty = B \times B \times \dots$ — прямое произведение σ -алгебр, E_θ^∞ , D_θ^∞ — соответственно математическое ожидание и дисперсия по мере P_θ^∞ ,

$$c_1 = \frac{1}{V^n} \sum_{j=1}^n l_1(x_j, \theta_0), \quad c_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n l_2(x_j, \theta_0),$$

$$c_i = \frac{1}{n \cdot i!} \sum_{j=1}^n l_i(x_j, \theta_0), \quad i = 3, \dots, k+1.$$

Буквой ε будем обозначать положительные числа (не обязательно одни и те же). Постоянные в символах O зависят только от класса распределений $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, от функции π , от k , от α , от p, q, r и от K .

Теорема 1. В условиях 1)–10) $\forall K \subset \Theta$ существует константа $C > 0$, зависящая только от $K, \{P_\theta, \theta \in \Theta\}, \pi, k, \alpha, p, q, r$, такая, что

$$\sup_{\theta_0 \in K} P_{\theta_0}^\infty \left\{ \left| \sqrt{n}(\bar{\theta}_n - \theta_0) - \sum_{i=0}^{k-1} Q_i n^{-i/2} \right| > C n^{-\frac{k-1}{2} - \varepsilon} \right\} = O \left(n^{-\frac{k-1}{2} - \varepsilon} \right),$$

где $Q_i, i = 0, \dots, k-1$, — полиномы от $c_1, 1/c_2, c_3, \dots, c_{i+2}$, степень которых не превосходит $7i+2$ ($3i+1, 3i+1, i$ по $c_1, 1/c_2$ и совокупности прочих c_j соответственно), а коэффициенты зависят от $\pi^{(j)}(\theta_0), j = 0, \dots, i$, и могут быть явно вычислены.

При доказательстве используется метод работы ⁽¹⁾ и следующее утверждение.

Лемма. В условиях 1, 3, 4а) для достаточно малого $\delta > 0$, для любого $K \subset \Theta$

$$\sup_{\theta_0 \in K} P_{\theta_0}^{\infty} \left\{ \inf_{|\theta - \theta_0| \leq n^{\delta}/\sqrt{n}} \prod_{j=1}^n f(x_j, \theta) = 0 \right\} = O \left(n^{-\frac{k-1}{2} - \varepsilon} \right).$$

Замечание 1.

$$\begin{aligned} Q_0 &= -\frac{c_1}{c_2}, \quad Q_1 = -\frac{\pi^{(1)}(\theta_0)}{\pi(\theta_0)} \frac{1}{c_2} + 3c_3 \frac{1}{c_2^2} - 3c_3 c_1^2 \frac{1}{c_2^3}, \\ Q_2 &= \left(\frac{\pi^{(2)}(\theta_0)}{\pi(\theta_0)} - \left(\frac{\pi^{(1)}(\theta_0)}{\pi(\theta_0)} \right)^2 \right) c_1 \frac{1}{c_2^2} - \left(12c_4 c_1 + 6 \frac{\pi^{(1)}(\theta_0)}{\pi(\theta_0)} c_3 c_1 \right) \frac{1}{c_2^3} + \\ &\quad + (4c_4 c_1^3 + 36c_3^2 c_1) \frac{1}{c_2^4} - 18c_3^2 c_1^3 \frac{1}{c_2^5}. \end{aligned}$$

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1)–10) и $\sup_{\theta \in K} E_{\theta} |l_1(x_1, \theta)|^{3k-1+\alpha} < \infty$ для некоторого $\alpha > 0$, $\forall K \subset \Theta$.

Тогда $\forall K \subset \Theta$

$$\begin{aligned} \text{а) } \sup_{\theta_0 \in K} |E_{\theta_0}^{\infty} [V\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta_0)] - \sum_{i=1}^{k-1} e_i n^{-i/2}| &= O \left(n^{-\frac{k-1}{2} - \varepsilon} \right), \quad \text{где } e_1 = \\ &= \frac{\pi^{(1)}(\theta_0)}{\pi(\theta_0)} \frac{1}{I(\theta_0)} + (E_{\theta_0} l_1(x_1, \theta_0) l_2(x_1, \theta_0) + E_{\theta_0} l_3(x_1, \theta_0)) \frac{1}{I^2(\theta_0)}, \quad e_2 = 0. \\ \text{б) } \sup_{\theta_0 \in K} |D_{\theta_0}^{\infty} [V\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta_0)] - \frac{1}{I(\theta_0)} - \sum_{i=2}^{k-1} d_i n^{-i/2}| &= O \left(n^{-\frac{k-1}{2} - \varepsilon} \right), \end{aligned}$$

где коэффициенты e_i, d_i зависят от моментов величин $l_j, j = 1, \dots, i+2$, от $\pi^{(i)}(\theta_0), i = 0, \dots, i$, и могут быть явно вычислены.

Замечание 2. Для $k = 1, 2, 3$ степень Q_i равна $4i + 2$ ($i + 1, 2i + 1, i$ по $c_1, 1/c_2$ и совокупности прочих c_j соответственно) и для утверждения теоремы 2 достаточно условий 1)–10). Автору пока не удалось доказать такое утверждение для любого k .

Теорема 3. Пусть условия 1)–10) выполнены при $k = 2$, и пусть или $\forall K \subset \Theta$

$$\inf_{\theta \in K} (I(\theta) D_{\theta} l_2(x_1, \theta) - E_{\theta}^2 l_1(x_1, \theta) l_2(x_1, \theta)) > 0,$$

или

$$I(\theta) D_{\theta} l_2(x_1, \theta) - E_{\theta}^2 l_1(x_1, \theta) l_2(x_1, \theta) = 0 \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Тогда $\forall K \subset \Theta$

$$\sup_{\theta_0 \in K} \sup_{u \in R^1} |P_{\theta_0}^{\infty} \{V\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta_0) < u\} - \Phi(u\sqrt{I(\theta_0)})| = O(1/\sqrt{n}),$$

где Φ — функция стандартного нормального распределения.

Доказательство может быть получено из утверждения теоремы 1 применением оценки скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме, принадлежащей В. В. Сазонову⁽³⁾. Способ рассуждений, аналогичный этому, впервые встречается у Ю. В. Линника и Н. М. Митрофановой⁽⁴⁾.

Автор выражает благодарность И. А. Ибрагимову за постановку задачи и внимание к работе.

Ленинградский государственный университет

им. А. А. Жданова

Поступило

16 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, ДАН, 194, № 2, 257 (1970). ² И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, ДАН, 198, № 3, 520 (1971). ³ V. V. Sazonov, Sankhyā, Ser. A, 30, 2, 181 (1968). ⁴ Yu. V. Linnik, N. M. Mitrofanova, Sankhyā, Ser. A, 27, 1, 73 (1965).