

УДК 518.88 + 519.3 + 517.948

МАТЕМАТИКА

А. Л. КАЛАШНИКОВ, С. Н. СЛУГИН

ПОТОЧЕЧНОЕ ПОЛУУПОРЯДОЧЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА И ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 29 III 1972)

Здесь выделяется один класс нормированных K -линеалов X , обладающих некоторыми важными свойствами KN -линеалов, но, в отличие от них, норма положительных элементов в X , вообще говоря не монотонна. Частным случаем такого нормированного K -линеала является пространство Соболева W_p' при поточечном полуупорядочении.

Устанавливаются признаки положительности оптимального решения, когда ограничения на допустимые управления заданы линейным операторным уравнением в X , а критерий качества определен как минимум нормы.

1. В дальнейшем X — равномерно выпуклое ^(1, 2) B -пространство, являющееся K -линеалом ⁽³⁾, причем требуется также выполнение условий: $\| |x| \| = \|x\|$ и множество регулярных ⁽³⁾ функционалов f над X , имеющих (b) -линейную мажоранту, плотно в сопряженном пространстве X^* .

Таким образом, здесь требуется для указанных функционалов f существование таких линейных непрерывных функционалов φ , что $|f(x)| \leq \varphi(|x|)$ при всех $x \in X$. Из равномерной выпуклости B -пространства X следует ⁽²⁾ его рефлексивность. Сходимость и т. п., а также ограниченность понимаются по норме.

Утверждаем следующее. В X структурные операции непрерывны: если $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, то грани $x_n \bigvee \bigwedge y_n \rightarrow x \bigvee \bigwedge y$, модули $|x_n| \rightarrow |x|$. Конус X_+ замкнут. K -линеал X архимедов. Если $|x_n| \leq |y_n|$, $y_n \rightarrow 0$, последовательность x_n ограничена, то $x_n \rightarrow 0$. Если $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ и $x_n \rightarrow x$ ⁽³⁾ или $x_n \rightarrow x$, то $x_n \rightarrow x$. Пусть $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, тогда для сходимости $x_n \rightarrow x$ необходима и достаточна ^(r)-компактность последовательности x_n . Если последовательность $x_n \rightarrow x$ и ограничена, то она слабо сходится к x .

2. Пусть K -линеал X имеет единицу 1 ⁽³⁾. Тогда множество всех существенно положительных элементов $(x \geq \alpha 1$ для некоторого числа $\alpha = \alpha_x > 0)$ плотно в конусе X_+ .

3. Пусть имеется семейство F некоторых регулярных функционалов с (b) -линейной мажорантой, причем F плотно в X^* и функционалы $f \in F$ непрерывны относительно монотонной ^(o)-сходимости $(x_n \geq x_{n+1}, (o) - \lim x_n = \inf x_n)$. Тогда из соотношений $x_n \rightarrow x$, $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ следует $x_n \rightarrow x$.

4. В ⁽⁴⁾ сформулирована следующая задача оптимального управления X и Y — B -пространства. Линейный ограниченный оператор T отображает X на Y . Для заданной правой части y отыскивается оптимальное решение $Tu = y$, $\|u\| = \min$.

Обозначения. $U = \{u: \|u\| \leq 1\} \subset X$, $C = T(U)$, $p(y) = \inf \{\lambda > 0: y \in \lambda C\}$, $y_0 = p^{-1}(y)$ $y \in \partial C$, ∂C — граница выпуклого тела C , причем здесь $0 \in \text{int } C$ ⁽⁴⁾.

Пусть X удовлетворяет требованиям п. 1 настоящей работы. Сформулируем достаточные признаки положительности оптимального решения, что значительно сужает область поиска оптимума.

Из рефлексивности B -пространства X следует ⁽⁴⁾ замкнутость тела C , включение $\partial C \subset C$ и существование оптимального решения u для любой правой части y , причем $\|u\| = p(y)$.

Введем в пространстве Y соотношение порядка, называя элемент $y > 0$, если $y \neq 0$ и существует элемент $x > 0$: $Tx = y$. При таком определении порядка Y становится частично упорядоченным линейалом (из неравенств в Y $y, z > 0$ следует $y \neq 0$, $y + z \geq 0$, $\lambda y > 0$ для всех чисел $\lambda > 0$), а T — возрастающим оператором, отображающим конус X_+ на конус Y_+ . Сопряженный оператор T^* тоже становится возрастающим.

Элемент $y_0 \in \partial C$ называется K -максимальным в теле C , если нет элемента $w > y_0$, $w \in C$.

Теорема 1. Если элемент y_0 K -максимален в теле C , то для правой части y существует положительное оптимальное решение

$$u > 0, \quad \|u\| = \min \{\|x\|: Tx = y\}.$$

Следовательно, оптимальное решение можно искать в пересечении конуса X_+ и сферы $\|u\| = p(y)$.

5. Находясь в условиях пп. 1, 2, 4, сформулируем достаточный признак положительности произвольного оптимального решения для заданной правой части.

Пусть образ $e = T1 \neq 0$. Тогда по определению порядка в Y элемент $e > 0$. Далее, элементы $y \geq \alpha e$ (для некоторого числа $\alpha = \alpha_y > 0$) называем (e) -положительными. Из непрерывности и возрастания отображения T следует плотность множества всех (e) -положительных элементов в конусе Y_+ .

Если разность $y_0 - v$ (e) -положительна, то y_0 называем (e) -мажорантой для элемента v .

Пусть граница ∂C содержит «шапочку» E_0 : E_0 — множество элементов $y_0 > 0$ границы ∂C , для каждого из которых имеется такая окрестность V точки y_0 , что если элемент $v \in V \cap \partial C$ и (e) -положителен, то элемент y_0 не является (e) -мажорантой для v .

Линейный функционал φ называется возрастающим, если $\varphi(y) \geq 0$ при $y > 0$. Линейный функционал ψ называется опорным (не нулевым касательным ⁽⁵⁾) ко множеству C в точке $y_0 \in \partial C$, если $\psi \neq 0$, $\psi(y_0) \geq \psi(z)$ при всех $z \in C$. Существование для всех $y_0 \in \partial C$ и непрерывность ψ следуют ⁽⁵⁾ из того факта, что C является выпуклым телом, $0 \in \text{int } C$.

Лемма 1. Если а) точка y_0 является (e) -положительным элементом множества E_0 , б) семейство ограниченных ⁽³⁾ элементов плотно в конусе X_+ , то функционал, опорный к телу C в точке y_0 , возрастает.

Если элемент v не имеет (e) -мажорант в некотором множестве M , то v называем (e) -максимальным в M .

Пусть теперь граница ∂C содержит множество E_1 , где, в отличие от определения множества E_0 , требуется, чтобы (e) -положительные элементы v , находящиеся в $V \cap \partial C$, были (e) -максимальными в этом пересечении.

Лемма 2. Если а) элемент $y_0 \in E_1$ и (e) -максимален в C , б) B -пространство Y сепарабельно и выполнено условие б) леммы 1, то существует возрастающий функционал, опорный к телу C в точке y_0 .

Лемма 3. Пусть а) функционал, опорный к шару U в точке s , возрастает, б) неравенство $x_- > 0$ влечет в X $\|x_+\| < \|x\|$.

Тогда экстремаль $s > 0$.

Теорема 2. Если выполнены условия хотя бы одной из лемм 1, 2 и условие б) леммы 3, то для правой части y любое оптимальное решение положительно.

6. Ясно, что в леммах 1, 2 условие (e) -максимальности можно заменить на более жесткое требование K -максимальности. Для выпуклого

тела C требования K -максимальности во всем теле C или в пересечении $V \cap \partial C$ эквивалентны.

Условие K -максимальности самого элемента y_0 необходимо.

Лемма 4. Если функционал, опорный к телу C в точке y_0 , возрастает, то элемент y_0 K -максимален в C .

В доказательстве используется равномерная выпуклость B -пространства X и тот очевидный факт, что конус Y_+ воспроизводящий.

7. Леммы 1—4 и теоремы 1, 2 остаются верными и в том случае, когда соотношение сравнимости в частично упорядоченном линеале Y определено независимо от порядка в X . При этом требуется возрастание оператора T .

8. В пространстве $W = W_p'$ (¹) функций $x(t_i)$, определенных на области Ω , выбрана норма, степень которой

$$\|x\|^p = \int_{\Omega} |x|^p d\Omega + \sum_i \int_{\Omega} |\partial x / \partial t_i|^p d\Omega.$$

Из неравенств Кларксона (¹), примененных к функциям и их частным производным, следует равномерная выпуклость и рефлексивность пространства W . После естественного поточечного полуупорядочения (ср. (⁶)), когда положительным элементом называется неотрицательная функция, W становится K -линеалом, норма элементов которого не монотонна в конусе W_+ . Дизъюнктность $x \cdot y$ (равенство $x \cdot y = 0$) влечет ортогональность p -го порядка: $\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$. Поэтому в W $\|x\| = \|x\|$ и выполняется условие б) леммы 3.

Функция $x(t_i) \equiv 1$ является единицей в K -линеале W . Условия б) лемм 1, 2 здесь тоже оказываются выполненными.

Функционалы типа функции

$$f(x) = \int_{\Omega} g \cdot x d\Omega, \quad x \in W, \quad g \in L_q, \quad 1/p + 1/q = 1,$$

(o)-непрерывны, регулярны, имеют (b)-линейные мажоранты и составляют тотальное множество F , плотное в сопряженном пространстве W^* . Итак, пространство $X = W$ удовлетворяет всем требованиям, указанным выше в пп. 1—3.

Горьковский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
21 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск, 1962. ² К. Иосида, Функциональный анализ, М., 1967. ³ Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961. ⁴ У. Портер, Современные основания общей теории систем, «Наука», 1971. ⁵ Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, Линейные операторы. Общая теория, М., 1962. ⁶ А. Л. Калашников, С. Н. Слугин, ДАН, 194, № 2, 261 (1970).