Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 2

УДК 517.53 *МАТЕМАТИКА*

Б. П. КУФАРЕВ

ОЦЕНКИ МЕР ХАУСДОРФА ПРИ ОТОБРАЖЕНИЯХ ТИПА W_p^1

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 31 III 1972)

Назовем калибровочной всякую функцию, которая определена и непрерывна слева на $[0, \infty)$, не убывает, положительна при $t > 0$, причем $\varphi(0+) = \varphi(0) = 0$. Калибровочную функцию назовем правильной, если

$$\varphi(ct) \leqslant \varphi(c) \cdot \varphi(t) \quad \forall c > 0,\ t > 0.$$

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство с метрикой ρ. Через $H_\varphi{}^\rho$ обозначим φ-меру Хаусдорфа, соответствующую метрике ρ в X ([1], стр. 84). Как известно, все борелевские множества из X измеримы относительно $H_\varphi{}^\rho$, поскольку φ-меры суть меры Каратеодори (там же, стр. 82).

Если $\varphi(t) = t^\alpha$, то мы пишем $H_\alpha{}^\rho$ вместо $H_\varphi{}^\rho$; если $X = R^n$ — эвклидово пространство, $\rho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$, то будем писать H_φ вместо $H_\varphi{}^\rho$.

Теорема 1. *Пусть (X, ρ) и (Y, r) — метрические пространства, а φ_1 и φ_2 — калибровочные функции. Если для отображения f: $X \to Y$ существует такое $\delta > 0$, что*

$$\varphi_2 \circ r(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \varphi_1 \circ \rho(x_1, x_2) \tag{1}$$

$\forall x_1, x_2 \in X$ с расстоянием $\rho(x_1, x_2) < \delta$, то

$$H^r_{\varphi_2}(f(E)) \leqslant H^\rho_{\varphi_1}(E) \quad \forall E \subset X.$$

Если, кроме того, отображение f взаимно однозначно и

$$\varphi_3 \circ \rho(x_1, x_2) \leqslant \varphi_2 \circ r(f(x_1), f(x_2)) \quad \text{при } r < \delta,$$

то $H_{\varphi_3}{}^\rho(E) \leqslant H_{\varphi_2}{}^r(f(E)) \leqslant H_{\varphi_1}{}^\rho(E) \quad \forall E \subset X$. В последнем случае, в частности, мера $\nu(E) = H_{\varphi_2}{}^r(f(E))$ абсолютно непрерывна относительно $H_{\varphi_1}{}^\rho$ на классе борелевских множеств из X.

Не приводя здесь доказательства, заметим лишь, что условие (1) обеспечивает равномерную непрерывность отображения f.

1. Некоторые следствия. В большинстве приводимых ниже примеров ясно, по какой метрике взято пополнение пространства X или Y. Эти пополнения мы обозначаем тогда через $\tilde{X}$ (или $\tilde{Y}$) без указания метрик, а отображения f считаем (где это нужно) продолженными на $\tilde{X}$ (или $\tilde{Y}$).

Заметим еще, что при известных ограничениях (см., например, ([2])) на области и отображения f даваемые ниже оценки становятся равностепенными по f.

Всюду в дальнейшем E — произвольное множество из некоторого $\tilde{X}$, а D_ε — круг в R^2 с центром в начале координат и радиусом ε.

а) Если на множестве $X \subset R^n$ отображение f удовлетворяет условию

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant C|x' - x''|^{1/Q}, \quad Q \geqslant 1,$$

то для всякой правильной функции $\varphi(t)$

$$H_\varphi(f(E)) \leqslant \varphi(c) \cdot H^\rho_\varphi(E), \quad \rho(x, \xi) = |x - \xi|^{1/Q},$$
$$H_\alpha(f(E)) \leqslant C^\alpha \cdot H_{\alpha/Q}(E), \quad \alpha > 0,$$
$$H_{\alpha Q}(f(E)) \leqslant C^{\alpha Q} \cdot H_\alpha(E) \quad \forall E \subset X.$$

б) Пусть (f) — семейство Q-квазиконформных отображений ограниченных областей (G_f) на круг D_1, $f(0)=0$, причем $D_\varepsilon \subset G_f$, $0<\varepsilon<1$. Тогда $\forall f \in (f)$

$$H_1(f(E)) \leqslant C(Q, \varepsilon) \cdot H^{\rho}_{1/2Q}(E, \widetilde{G}_f),$$

где ρ — метрика Г. Д. Суворова ((2), стр. 50 и 120).

в) Пусть f — гомеоморфизм плоских ограниченных односвязных областей G и Δ, причем f и f^{-1} принадлежат классу BL (см. (2)). Тогда для всякой правильной функции $\varphi(t)$

$$\varphi(\sqrt{3}) \cdot H^{\rho}_{\varphi_2}(E, \widetilde{G}) \leqslant H^{\rho}_{\varphi}(f(E), \widetilde{\Delta}) \leqslant \varphi(2\sqrt{\pi C}) \cdot H^{\rho}_{\varphi_1}(E, \widetilde{G}),$$

где $\varphi_2(t) = \varphi \circ \exp(-4\pi C t^{-2})$, $\varphi_1(t) = \varphi \circ \ln^{-1/2}(\sqrt{3}/t)$. Здесь константа C, вообще говоря, зависит от f, а ρ — метрика из (2).

г) Пусть G и Δ — ограниченные гомеоморфы шара в R^n и f — гомеоморфизм G на Δ, причем $f(0)=0$ и $f, f^{-1} \in BL^{n/2}$ (см. (3), стр. 259). Тогда

$$H^{\sigma}_{\varphi_2}(E) \leqslant H^{\sigma}_{\alpha}(f(E)) \leqslant C^{\alpha} \cdot H^{\sigma}_{\varphi_1}(E) \quad \forall E \subset G.$$

Здесь $\varphi_1(t) = \ln^{-\alpha/n}(1/t)$, $\varphi_2(t) = \exp(-\alpha C_1 t^{-n})$; C, C_1 зависят от f, а σ — метрика И. С. Овчинникова ((3), стр. 269).

д) Пусть f гомеоморфно отображает шар D: $|x|<1$ на область $\Delta \subset R^n$, $f \in BL^{n/2}$ в D, $f(0)=0$. Тогда

$$H^{\rho}_{\alpha}(f(E), \widetilde{\Delta}) \leqslant C(f) \cdot H_{\varphi}(E, \overline{D}),$$

где $\alpha>0$, ρ — метрика Овчинникова — Суворова ((3), стр. 266), $\varphi(t) = \ln^{-\alpha/n}(2/t)$ и $\overline{D}$: $|x| \leqslant 1$. Если Δ — шар и $f^{-1} \in BL^{n/2}$ в Δ, то

$$H_{\varphi_1}(E) \leqslant H_{\alpha}(f(E)) \leqslant C(f) \cdot H_{\varphi}(E) \quad \forall E \subset \overline{D},$$

причем $\varphi_1(t) = \exp(-\alpha C t^{-n})$.

2. Конформно-инвариантная мера. Рассмотрим для плоской области G, содержащей точку $z=0$, конформно инвариантную метрику

$$\rho(z_1, z_2) = \lambda^{1/2}(\gamma_{z_1 z_2}),$$

где λ — экстремальная длина семейства сеток (обобщенных кривых), охватывающих точки $z_1, z_2 \in G \setminus \{0\}$ (см. (4, 5)). Заметим, что $\rho(z, 0) = +\infty$.

Легко доказывается следующая

Теорема 2. *Если D — область в R^2, граница которой состоит из конечного числа окружностей без общих точек, и круг D_ε: $|w| \leqslant \varepsilon$ входит в D, то существует такое $\delta(\varepsilon, D)$, что $\forall w_1, w_2 \in D \setminus D_\varepsilon$ с расстоянием $|w_1 - w_2| < \delta$*

$$\frac{|w_1-w_2|}{\sqrt{\operatorname{mes}_2 D}} \leqslant \rho(w_1, w_2) < \sqrt{2\pi} \ln^{-1/2} \frac{\pi\varepsilon}{|w_1-w_2|}. \tag{2}$$

Левая часть этого неравенства верна для произвольной плоской области D.

Так как ρ — конформный инвариант, то из неравенства (2) следует, что метрика $\rho(z_1, z_2)$ согласована с топологией Каратеодори в $G \setminus D_\varepsilon$ для любой конечносвязной области G (ε сколь угодно мало).

Неравенство (2) влечет для $E \subset \overline{D} \setminus D_\varepsilon$

$$[\varphi(\sqrt{\operatorname{mes}_2 D})]^{-1} \cdot H_{\varphi}(E) \leqslant H^{\rho}_{\varphi}(E) = H^{\rho}_{\varphi}(f(E)) \leqslant \varphi(\sqrt{2\pi}) \cdot H_{\psi}(E), \tag{3}$$

где φ — правильная функция $\psi(t) = \varphi \circ \ln^{-1/2}(\pi\varepsilon/t)$, а f — произвольное конформное отображение области D. В частности, любая мера $H_{\varphi}{}^{\rho}(E)$ конформно инварианта.

Далее, как известно, для Q-квазиконформного отображения f имеем

$$Q^{-1/2}\rho(z_1, z_2) \leqslant \rho(f(z_1), f(z_2)) \leqslant Q^{1/2}\rho(z_1, z_2),$$

откуда следует, в частности, что при квазиконформном отображении плоских конечносвязных областей G соответствие границ осуществляется по простым концам. При этом для правильных $\varphi(t)$

$$[\varphi(\sqrt{Q})]^{-1}\cdot H_\varphi^\rho(E)\leqslant H_\varphi^\rho(f(E))\leqslant\varphi(\sqrt{Q})\cdot H_\varphi^\rho(E)\quad \forall E\subset(\widetilde{G},\rho). \tag{4}$$

Соотношения (3) и (4) говорят в пользу того, что $H_\varphi{}^\rho$ есть «емкостная» характеристика множества. Из (4) и (3) следует

Теорема 3. *Пусть f — квазиконформное отображение некоторой области G на круг $|w|<1$.*

Тогда

$$H_\varphi^\rho(E)=0\Rightarrow H_\varphi(f(E))=0\quad \forall E\subset(\widetilde{G},\rho).$$

Однако обратное, вообще говоря, неверно. Например, для $\varphi(t)=t$ (т. е. $H_\varphi=H_1$) существует, как известно ([6]), такое квазиконформное отображение f круга на себя, при котором некоторое множество E точек границы круга с мерой $H_1(E)=0$ преобразуется во множество с мерой $H_1(f(E))>$ >0, а тогда

$$H_1^\rho(E)=H_1^\rho(f(E))>0. \tag{5}$$

Таким образом, с помощью меры $H_1{}^\rho$ не удается охарактеризовать те множества простых концов односвязной области, которые при конформном отображении на область со спрямляемой границей переходят во множества нулевой длины. Это можно сделать, используя метрику А. Д. Мышкиса μ, инвариантную относительно конформных преобразований f области G, нормированных условием $f(0)=0$ ([7]). Напомним ее определение. Пусть $a\in G$ и $v(z)$ — обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа (см. ([8]) или ([9]), стр. 298) при краевом условии

$$v(z)=\ln|z-a|,\quad z\in \operatorname{Fr} G.$$

Положим $u(z)=-\ln|z-a|+v(z)$, $z\in G\setminus\{a\}$. Тогда

$$\mu(z_1,z_2)=\inf_{l_{z_1z_2}}\int_l|\nabla u|e^{-u}\,ds,$$

где $l_{z_1z_2}$ — семейство всех гладких дуг, соединяющих z_1 и z_2 в G. В работе ([7]) доказано, что $\mu(z_1,z_2)=|f(z_1)-f(z_2)|$, если f конформно отображает G на круг $|w|<1$, так что $f(a)=0$. Ясно, что при этом метрическая топология в G, порожденная метрикой μ, равносильна топологии простых концов Каратеодори. Используя известную теорему Лузина — Привалова (([10]), стр. 179), легко получаем, что справедлива

Теорема 4. *Если f — продолженное до гомеоморфизма $\widetilde{G}$ на $\overline{D}$ конформное отображение односвязной области G на область D, ограниченную спрямляемой кривой, то*

$$H_1(f(E))=0\Leftrightarrow H_1^\mu(E)=0\quad \forall E\subset(\widetilde{G},\mu).$$

Неравенство (5) и теорема 4 показывают, что меры $H_1{}^\mu$ и $H_1{}^\rho$ не эквивалентны, хотя порождающие их метрики μ и ρ эквивалентны.

3. Квазиинвариантная граница области в пространстве. Пусть R — кольцевая область в R^n, C — ограниченная компонента ее дополнения, β_{xy} — семейство континуумов, соединяющих точки x, y в R, Γ_β — семейство кривых, соединяющих континуумы β и C по R. Положим

$$d(x,y)=\inf_{\beta_{xy}}M(\Gamma_\beta),$$

где M — модуль ([11], [12]) семейства кривых. Нетрудно видеть, что d есть псевдометрика в R, причем для любого Q-квазиконформного отображения f кольца R

$$\frac{1}{Q} d(x, y) \leqslant d(f(x), f(y)) \leqslant Q\, d(x, y).$$

Можно доказать (это сделано в дипломной работе Р. П. Поляковой), что для некоторого класса колец R, например, если C имеет внутреннюю точку a, относительно которой область $D = R \cup C$ звездна, функция d есть квазиинвариантная метрика в R. При этом, если D квазиконформно эквивалентна шару, то эвклидова граница шара и метрическая граница области D (относительно d) гомеоморфны. Поэтому $\forall E \subset \tilde{D} \setminus C$, для всякой правильной функции $\varphi(t)$

$$[\varphi(Q)]^{-1} \cdot H_\varphi^d(E) \leqslant H_\varphi^d(f(E)) \leqslant \varphi(Q) \cdot H_\varphi^d(E).$$

Томский государственный университет
им. В. В. Куйбышева

Поступило
6 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Сако, Теория интеграла, М., 1949. [2] Г. Д. Суворов, Семейства плоских топологических отображений, Новосибирск, 1965. [3] Г. Д. Суворов, Contributions to Extension Theory of Topological Structures, Berlin, 1969, p. 257. [4] J. S. Gal, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 45, 1629 (1959). [5] П. П. Куфарев, Б. П. Куфарев, ДАН, **187**, № 5, 986 (1969). [6] A. Beurling, L. Ahlfors, Acta Math., **96**, 125 (1956). [7] А. Д. Мышкис, Матем. сборн., **25** (67), № 3, 387 (1949). [8] М. В. Келдыш, УМН, в. 8, 171 (1941). [9] Н. С. Ландкоф, Основы современной теории потенциала, М., 1966. [10] И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950. [11] B. Fuglede, Acta Math., **98**, 171 (1957). [12] Б. В. Шабат, ДАН, **130**, № 6, 1210 (1960).