Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 3

УДК 517.5:513.811

МАТЕМАТИКА

М. Л. АГРАНОВСКИЙ

ИНВАРИАНТНЫЕ АЛГЕБРЫ НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 7 IV 1972)

Инвариантные относительно движений алгебры функций на однородных пространствах изучались в работах ряда авторов ([1-6]). В этих работах в основном изучалась «вещественная» ситуация и описание алгебр голоморфного происхождения оставалось вне поля зрения.

Настоящая работа посвящена вопросам, связанным, в частности, с изучением именно таких алгебр.

1. Пусть X — связное риманово симметрическое (р.с.) пространство некомпактного типа, $I_0(X)$ — компонента связности единицы в группе всех изометрий X, dx — элемент $I_0(X)$-инвариантного объема на X.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *все замкнутые $I_0(X)$-инвариантные подпространства в $L^2(X, dx)$ самосопряжены (замкнуты относительно операции комплексного сопряжения функций);*

2) *зональные сферические функции на X вещественнозначны;*

3) *группа Вейля р.с. пространства X содержит автоморфизм $-I$, где I — тождественный автоморфизм.*

В компактном случае эта теорема доказана Вольфом ([5]) (см. также ([7])). Теорема 1 на основании известной двойственности между р.с. пространствами компактного и некомпактного типов позволяет перечислить (с точностью до изометрического изоморфизма) все связные односвязные р.с. пространства X, для которых из инвариантности подпространства в $L^2(X, dx)$ вытекает его самосопряженность. Таковыми являются прямые произведения одних из следующих симметрических пространств: пространства компактного типа, указанные в ([5]), двойственные к ним пространства некомпактного типа, эвклидово пространство размерности больше 1.

Отметим, что условию 3) удовлетворяют все эрмитовы симметрические пространства.

Обозначим через $C_0(X)$ алгебру всех комплекснозначных непрерывных функций на X, равных нулю на бесконечности, с равномерной нормой. Из одного результата Кобаяси ([10]) о неподвижных точках изометрий риманова многообразия отрицательной кривизны вытекает, что все $I_0(X)$-инвариантные подалгебры в $C_0(X)$ на неприводимом р.с. пространстве некомпактного типа исчерпываются тривиальными: $\{0\}$, $C_0(X)$. (В компактном случае указанный класс алгебр, как показано в ([5]), достаточно обширен.)

Из сказанного и теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть X — связное неприводимое р.с. пространство некомпактного типа, удовлетворяющее условию 3) теоремы 1 и A — $I_0(X)$-инвариантная подалгебра в $C_0(X)$.*

Если $A\cap L^p(X, dx)$ плотно в A (для некоторого $p = 1, 2, \ldots$), то либо $A = \{0\}$, либо $A = C_0(X)$.

Замечание. Теорему 2 можно сформулировать как утверждение об аппроксимации: если $f\in C_0(X)\cap L^p(X, dx)$, $f\not\equiv 0$, то полиномами от сдвигов $f_g(x) = f(gx)$, $g\in I_0(X)$ функции f можно равномерно приблизить любую функцию из $C_0(X)$.

Описание аналогичного класса алгебр на локально-компактных абелевых группах дано в работе ([3]).

В силу бесконечности инвариантного объема dx на X принадлежность непрерывной функции к $L^p(X, dx)$ означает быстрое убывание ее на бесконечности. За счет уточнения понятия быстро убывающей функции оказывается возможным снять ограничения (условие 3)) на рассматриваемый класс пространств.

Пусть X — связное р.с. пространство некомпактного типа, K — максимальная компактная подгруппа в $I_0(X)$, H и Z — соответственно картановская и орисферическая подгруппы в $I_0(X)$. Сопоставим каждой функции $f \in L^1(X, dx)$ функцию $\tilde{f}(\omega)$ на пространстве орбит группы Z, получаемую усреднением f по группе Z. В силу однозначного разложения Ивасавы $I_0(X) = ZHK$ функцию $\tilde{f}(\omega)$ можно рассматривать как функцию $\tilde{f}(h)$ на H.

Обозначим через $C_{00}(X)$ совокупность всех $f \in L^1(X, dx)$, для которых

$$|\widetilde{f_k}|(h) \in L^1(H, dh), \quad k \in K, \quad \widetilde{|f|}_K(h) \in L^1(H, dh),$$

где dh — мера Хаара на H, $|f|_K(x) = \int |f(kx)|\,dk$ — сферическое среднее. Принадлежность функции к $C_{00}(X)^K$ означает достаточно быстрое убывание ее на бесконечности. Финитные функции принадлежат $C_{00}(X)$. Пусть, например, G — комплексная унимодулярная группа Ли, K — ее максимальная компактная подгруппа, π: $G \to G/K$ — естественное отображение G на р.с. пространство $X = G/K$ некомпактного типа. Если функция f на X такова, что $(f \circ \pi)(g) = o(\|g\|^{-n})$ при достаточно большом n, то $f \in C_{00}(X)$.

Теорема 3. *Пусть A — $I_0(X)$-инвариантная подалгебра в $C_0(X)$, обладающая аппроксимативной единицей и $A \cap C_{00}(X)$ плотно в A.*

Тогда либо $A = \{0\}$, либо $A = C_0(X)$.

Доказательство сводится к доказательству плотности в H спектра некоторого инвариантного относительно сдвигов подпространства L в $L^1(H, dh)$, конструируемого из $A \cap C_{00}(X)$ при помощи интегрирования по орисферам. Плотность спектра, в свою очередь, следует из симметричности его относительно группы Вейля и обширности запаса мультипликаторов пространства L.

2. Как вытекает из предыдущего пункта, инвариантные алгебры на р.с. пространствах некомпактного типа определяются своими сужениями на идеальную границу. Здесь мы рассмотрим инвариантные алгебры на эрмитовых симметрических пространствах (канонически реализованных как ограниченные симметрические области в $\mathbf{C}^n$), для которых такая граница естественно определена.

Результаты этого пункта связаны с получением комплексно-многомерных аналогов теорем типа теоремы Вермера ([9]) о максимальности алгебры граничных значений аналитических функций в круге.

Обозначим для произвольной области $D \subset \mathbf{C}^n$ через $A(D)$ алгебру всех функций, голоморфных в D и непрерывных в замыкании $\bar{D}$ области D в расширенном пространстве $\overline{\mathbf{C}^n}$. Через $A(\partial D)$ обозначим сужение алгебры $A(D)$ на ее границу Шилова (остов) ∂D.

Теорема 4. *Пусть $S = \mathbf{R}^n + iV$ — область Зигеля 1-го рода (V — однородный конус в $\mathbf{R}^n$, не содержащий прямых), $L(S)$ — группа аффинных преобразований области S, $L(\partial S) = L(S)/_{\partial S}$ — сужение $L(S)$ на остов ∂S.*

Для того чтобы алгебра $A(\partial S)$ была максимальной в классе $L(\partial S)$-инвариантных собственных подалгебр алгебры $C(\partial S)$ (всех непрерывных функций на ∂S с sup-*нормой), необходимо и достаточно, чтобы на S не существовало нетривиальных $L(S)$-однородных аналитических расслоений.*

Пусть теперь D — канонически реализованная ограниченная симметрическая область в $\mathbf{C}^n$, $G(D)$ — группа аналитических автоморфизмов области D, $G(\partial D)$ — индуцируемая группа гомеоморфизмов остова ∂D.

Разложим D в прямое произведение $D = D_1 \times \ldots \times D_N$ максимального числа попарно аналитически не эквивалентных областей. Для каждого набора $\{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q\}$ различных индексов этого разложения обозначим через $A_{i_1,\ldots,i_p,\bar{j}_1,\ldots,\bar{j}_q}(\partial D)$ алгебру всех функций из $C(\partial D)$, обладающих голоморфным продолжением по переменным $z_{i_k} \in D_{i_k}$, $k = 1, \ldots, p$, и антиголоморфным продолжением по переменным $z_{j_l} \in D_{j_l}$, $l = 1, \ldots, q$ (пустому набору индексов сопоставим алгебру $C(\partial D)$ всех непрерывных функций на ∂D).

Теорема 5. *Все $G(\partial D)$-инвариантные, разделяющие точки на ∂D подалгебры $C(\partial D)$ исчерпываются алгебрами вида $A_{i_1,\ldots,i_p}, {}_{\bar{j}_1,\ldots,\bar{j}_q}(\partial D)$.*

Если D неприводима, то всякая $G(\partial D)$-инвариантная подалгебра $C(\partial D)$ совпадает с одной из следующих: $\mathbf{C}$ (алгебра констант), $A(\partial D)$, $\bar{A}(\partial D)$ (комплексно-сопряженная к $A(\partial D)$ алгебра), $C(\partial D)$.

В частности, $A(\partial D)$ максимальна в классе $G(\partial D)$-инвариантных собственных подалгебр $C(\partial D)$.

Последнее утверждение может рассматриваться как аналог одного результата Е. А. Горина ([8]) для алгебры аналитических функций в полицилиндре для случая, когда остов области не является группой.

Доказательство использует строение топологической границы ограниченных симметрических областей — расслоение границы на компоненты — максимальные аналитические куски ([13]), а также теоремы 2 и 4. Частные случаи теоремы 5 доказаны в ([11], [12]).

Теорема 5 позволяет получать критерии голоморфной продолжимости непрерывной функции с остова в саму область. Продемонстрируем это на примере теоремы Севери для случая шара в $\mathbf{C}^n$.

Следствие 1. *Пусть D — шар в $\mathbf{C}^n$, $f \in C^1(\partial D)$ и $df \wedge dz_1 \wedge \ldots \ldots \wedge dz_n \equiv 0$. Тогда $f \in A(\partial D)$.*

Доказательство. Пусть B — алгебра всех функций, удовлетворяющих условию. Тогда B — $G(\partial D)$-инвариантна и ее равномерное замыкание B^- не совпадает с $C(\partial D)$ (это легко следует, например, из теоремы Стокса, примененной к написанной выше дифференциальной форме и произвольной подобласти на сфере ∂D с гладкой границей). Поскольку $A(\partial D) \subset B^-$, то по теореме 5 $B^- = A(\partial D)$ и $f \in A(\partial D)$.

Из теоремы 5 вытекают также следствия о равномерной аппроксимации на остове.

Следствие 2. *Все $G(\partial D)$-инвариантные подалгебры $C(\bar{D})$, разделяющие точки на ∂D и содержащие ненулевую функцию из $L^p(D)$, исчерпываются алгебрами вида $C_0(D) + A_{i_1,\ldots,i_p}, {}_{\bar{j}_1,\ldots,\bar{j}_q}(\partial D)$.*

3. Рассмотрим пространство Лобачевского, реализованное в виде единичного шара $D_n \subset \mathbf{C}^n$.

Теорема 6. *Пусть A — $G(D_n)$-инвариантная подалгебра $C(\bar{D}_n)$, содержащая непостоянную голоморфную (антиголоморфную) функцию.*

Тогда A совпадает с одной из следующих алгебр: $A(D_n)$ (соответственно $\bar{A}(D_n)$), $C_0(D_n) + A(D_n)$ $(C_0(D_n) + \bar{A}(D_n))$, $C(\bar{D}_n)$.

В основной своей части доказательство состоит в определении пространств максимальных идеалов инвариантных алгебр, содержащих $A(D_n)$, и использует теорему Е. Бишопа ([14]) об аналитической структуре пространства максимальных идеалов алгебры, порожденной дифференцируемыми функциями на одномерном вещественном дифференцируемом многообразии.

В качестве непосредственного следствия приведем следующий признак голоморфности в D_n.

Следствие. *Пусть E — замкнутое подмножество в $\bar{D}_n$, $\operatorname{int}(E \cap D_n) \neq \neq \phi$. Допустим, что функция $f \in C(\bar{D}_n)$ такова, что для любого аналитического автоморфизма $g \in G(D_n)$ сужение $f/_{\partial g(E)}$ функции f на границу* *множества* $g(E)$ *есть след голоморфной в* $\operatorname{int}(D_n \cap g(E))$ *и непрерывной в* $g(E)$ *функции. Тогда* $f \in A(D_n)$.

Доказательство немедленно вытекает из теоремы 6, примененной к алгебре A всех функций, удовлетворяющих условию.

Для случая плоскости Лобачевского, реализованной в виде единичного круга D_1 в комплексной плоскости, условия на описываемый класс алгебр удается свести к минимальным.

Теорема 7. *Пусть* A — *подалгебра в* $C(\overline{D}_1)$, *инвариантная относительно конформных преобразований круга. Допустим, что* A *содержит непостоянную функцию, удовлетворяющую условию Гёльдера в граничной точке.*

Тогда A *есть одна из следующих алгебр:* $A(D_1)$, $\overline{A}(D_1)$, $C_0(D_1) + A(D_1)$, $C_0(D_1) + \overline{A}(D_1)$, $C(\overline{D}_1)$.

Институт автоматики и электрометрии
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
22 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Е. Шилов, УМН, 6, № 1, 89 (1951). [2] Г. Е. Шилов, ДАН, 82, № 5, 681 (1952). [3] K. de Leeuw, H. Mirkil, Bull. Soc. math. France, 88, № 5, 345 (1960). [4] K. de Leeuw, H. Mirkil, Duke Math. J., 30, № 4, 667 (1963). [5] J. A. Wolf, Trans. Am. Math. Soc., 113, № 2, 299 (1964). [6] J. A. Wolf, Pacif. J. Math., 15, № 3, 1093 (1965). [7] J. A. Tirao, Proc. Am. Math. Soc., 24, № 2 (1970). [8] Е. А. Горин, Функц. анализ и его прилож., 1, № 3, 86 (1967). [9] J. Wermer, Proc. Am. Math. Soc., 4, 866 (1953). [10] S. Kobayashi, Nagoya Math. J., 13, 63 (1958). [11] М. Л. Аграновский, Р. Э. Вальский, Сибирск. матем. журн., 12, № 1, 3 (1971). [12] М. Л. Аграновский, ДАН, 197, № 1, 9 (1971). [13] A. Koranyi, J. A. Wolf, Am. J. Math., 87, № 1, 899 (1965). [14] E. Bishop, Trans. Am. Math. Soc., 112, № 3, 507 (1962).