Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 3

УДК 533.6:539.3:621-523.2

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

С. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ АЭРОАВТОУПРУГОСТИ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 10 III 1972)

1. Анализ поведения упругого аппарата, движущегося в сплошной среде, исследование управления им в первую очередь опираются на совместное решение задач аэродинамики, автоматического управления и теории упругости, поэтому указанную проблему будем называть аэроавтоупругостью. Одна из трудностей ее исследования связана с созданием достаточно точной и эффективной математической модели и получением на ее основе общих уравнений аэроавтоупругости. Это в значительной степени объясняется тем, что аэродинамические нагрузки, вызванные движением аппарата, деформацией поверхности, воздействием турбулентной атмосферы, отклонениями органов управления и т. д. определяются не только мгновенными состояниями процесса, но и его предысторией. Причиной этого является влияние аэродинамического следа, идущего вдоль поверхности аппарата и за ним, на состояние потока. К настоящему времени разработаны приближенные подходы, позволяющие на основе гипотез стационарности, гармоничности, поршневой теории замкнуть уравнения аэроавтоупругости ([1–3]).

Ниже излагается общий строгий подход, основанный на линейной нестационарной теории.

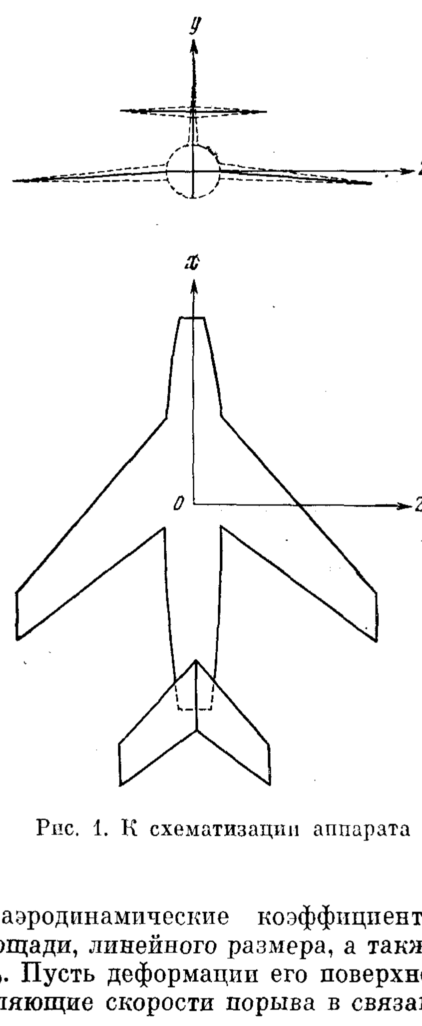

Рис. 1. К схематизации аппарата

Выберем связанную с аппаратом стандартную систему координат $Oxyz$. Заменим аппарат совокупностью тонких несущих поверхностей, форма которых определяется проекциями крыла, фюзеляжа, оперения и т. д. (на рис. 1 они показаны жирными линиями). Тонким поверхностям приписываются упругие свойства и распределения масс, приближенно описывающие аппарат. Введем безразмерные координаты ξ, η, ζ, время τ, линейные нестационарные аэродинамические коэффициенты $c(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ с помощью характерных площади, линейного размера, а также средней скорости движения аппарата u_0. Пусть деформации его поверхности происходят вдоль нормалей. Составляющие скорости порыва в связанных осях представим в виде

$$W^*_{x,\,y,\,z}(\xi, \eta, \zeta) = u_0 \sum_l w^l_{x,\,y,\,z}(\xi, \eta, \zeta)\, \Delta^l_{x,\,y,\,z}(\tau). \qquad (1)$$

Остановимся на двух представлениях деформаций (формулы (2) и (9)), которые позволяют получить точные линеаризованные уравнения аэроавтоупругости. За начало нестационарного процесса примем $\tau = 0$.

2. В качестве основных кинематических параметров примем $q_i(\tau)$, определяющие движение аппарата как твердого тела; углы отклонения управляющих органов $\delta_n(\tau)$ и их производные $\dot{\delta}_n(\tau)$, а также $\Delta^l_{x,y,z}(\tau)$; их совокупность для краткости будем обозначать $\varepsilon_m(\tau)$. Разобьем всю поверхность схематизированного аппарата на элементарные площадки, положения которых будем задавать двумя индексами $p\nu$. На каждой из них деформации поверхности будем аппроксимировать простейшими функциями, например,

$$n_{p\nu}(\xi, \eta, \zeta, \tau) = n^0_{p\nu}(\tau) + n^1_{p\nu}(\tau)\,\xi + n^2_{p\nu}(\tau)\,\zeta, \qquad (2)$$

$$p = 1, 2, \ldots, P; \qquad \nu = 1, 2, \ldots, N.$$

Граничное условие о плавном обтекании для нормальной составляющей возмущенной скорости можно записать в виде [3]

$$\frac{W_n}{u_0} = \sum_m F_{\varepsilon_m}(\xi, \eta, \zeta)\, \varepsilon_m(\tau) - n^1_{p\nu}(\tau) + \dot{n}^0_{p\nu}(\tau) + \dot{n}^1_{p\nu}(\tau)\,\xi + \dot{n}^2_{p\nu}(\tau)\,\zeta, \qquad (3)$$

где F_{ε_m} — известные функции, определяемые геометрией поверхности аппарата. Произведем их кусочную аппроксимацию постоянными на каждой площадке $p\nu$:

$$F^{p\nu}_{\varepsilon_m} = d^{p\nu}_{\varepsilon_m}, \quad p = 1, 2, \ldots, P; \quad \nu = 1, 2, \ldots, N. \qquad (4)$$

Функцией влияния для характеристики $c(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ будем называть соответствующую величину $[I_c^{p\nu}(\xi, \eta, \zeta, \tau)]$, полученную решением задачи аэродинамики при граничном условии, правая часть которого тождественно равна нулю всюду, кроме элемента $p\nu$, где она изменяется со временем по закону

$$1(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0; \\ 1, & \tau \geqslant 0. \end{cases} \qquad (5)$$

В силу линейности задачи, считая все кинематические параметры непрерывными функциями времени, на основании (3) и (4) аналогично [3] получаем

$$c(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \sum_{p\nu m} d^{p\nu}_{\varepsilon_m} \int_0^\tau \dot{\varepsilon}_m(\tau - \tau_1)\, [I_c^{p\nu}(\xi, \eta, \zeta, \tau_1)]\, d\tau_1 \sum_{p\nu} \int_0^\tau \{-\dot{n}^1_{p\nu}(\tau - \tau_1) + \ddot{n}^0_{p\nu}(\tau - \tau_1) + \xi_{p\nu}\ddot{n}^1_{p\nu}(\tau - \tau_1) + \zeta_{p\nu}\ddot{n}^2_{p\nu}(\tau - \tau_1)\}\, [I_c^{p\nu}(\xi, \eta, \zeta, \tau_1)]\, d\tau_1. \qquad (6)$$

Равенство (6) дает явное выражение аэродинамических характеристик через производные от основных кинематических параметров, что позволяет строго замкнуть уравнения аэроавтоупругости.

Пусть, например, линеаризированные соотношения динамики движения, упругих деформаций и управления записываются для каждой площадки $k\mu$ в виде дифференциальных равенств порядка не выше второго:

$$\sum_m (a^{jm}_{k\mu 0}\varepsilon_m + a^{jm}_{k\mu 1}\dot{\varepsilon}_m + a^{jm}_{k\mu 2}\ddot{\varepsilon}_m) + \sum_{l=0}^{2} (b^{jl}_{k\mu 0} n^l_{k\mu} + b^{jl}_{k\mu 1}\dot{n}^l_{k\mu} + b^{jl}_{k\mu 2}\ddot{n}^l_{k\mu}) + d^j_{k\mu} = e^j_{k\mu} c_{k\mu},$$

$$k = 1, 2, \ldots, P; \quad \mu = 1, 2, \ldots, N; \quad j = 1, 2, \ldots, G. \qquad (7)$$

Здесь a, b, d и e — известные функции времени или коэффициенты, j — номер уравнения. Обозначая в (6) индексами $k\mu$ значения функций влияния при $\xi = \xi_{k\mu}$, $\eta = \eta_{k\mu}$, $\zeta = \zeta_{k\mu}$ и подставляя выражения $c_{k\mu}$ в (7), получим системы линейных интегро-дифференциальных уравнений аэроавтоупругости

$$\sum_m [a^{jm}_{k\mu 0}\varepsilon_m(\tau) + a^{jm}_{k\mu 1}\dot{\varepsilon}_m(\tau) + a^{jm}_{k\mu 2}\ddot{\varepsilon}_m(\tau)] +$$

$$+ \sum_{l=0}^{2} [b^{jl}_{k\mu 0}n^l_{k\mu}(\tau) + b^{jl}_{k\mu 1}\dot{n}^l_{k\mu}(\tau) + b^{jl}_{k\mu 2}\ddot{n}^l_{k\mu}(\tau)] + d^j_{k\mu} =$$

$$= e^j_{k\mu}\sum_{p\nu m} d^{p\nu}_{\varepsilon_m}\int_0^\tau \dot{\varepsilon}_m(\tau-\tau_1)\,[I^{p\nu}_c(\tau_1)]_{k\mu}\,d\tau_1 +$$

$$+ e^j_{k\mu}\sum_{p\nu}\int_0^\tau \{-\dot{n}^1_{p\nu}(\tau-\tau_1) + \ddot{n}^0_{p\nu}(\tau-\tau_1) + \xi_{p\nu}\ddot{n}^1_{p\nu}(\tau-\tau_1) +$$

$$+ \zeta_{p\nu}\ddot{n}^2_{p\nu}(\tau-\tau_1)\}\,[I^{p\nu}_c(\tau_1)]_{k\mu}\,d\tau_1, \tag{8}$$

$$k = 1, 2, \ldots, P; \quad \mu = 1, 2, \ldots, N; \quad j = 1, 2, \ldots, G.$$

Заметим, что функции влияния определяются независимо от решения систем (8). В монографии ([3]) развиты численные методы, которые позволяют для крыла произвольной формы в плане как при дозвуковых, так и сверхзвуковых скоростях найти эти функции.

3. Будем искать деформации в виде

$$n(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \sum_j f_j(\xi, \eta, \zeta)\,n_j(\tau), \tag{9}$$

где $f_j(\xi, \eta, \zeta)$ — известные функции. В число основных кинематических параметров, с помощью которых удается получить явное выражение для аэродинамического функционала $c(\xi, \eta, \zeta, \tau)$, кроме рассмотренных выше $q_i(\tau)$, $\delta_n(\tau)$, $\dot{\delta}_n(\tau)$, $\Delta^l_{x,y,z}(\tau)$, нужно еще включить $n_j(\tau)$ и $\dot{n}_j(\tau)$. В данном случае, обозначив через $\varepsilon_m(\tau)$ всю указанную совокупность параметров, можно получить равенство

$$c(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \sum_m \int_0^\tau \dot{\varepsilon}_m(\tau-\tau_1)\,[c_{\varepsilon_m}(\xi, \eta, \zeta, \tau_1)]\,d\tau_1. \tag{10}$$

Здесь $[c_{\varepsilon_m}(\xi, \eta, \zeta, \tau)]$ — переходная функция, которая дает выражение характеристики $c(\xi, \eta, \zeta, \tau)$, если отличен от нуля только параметр $\varepsilon_m(\tau)$, причем $\varepsilon_m(\tau) = 1(\tau)$. Полагая, как и выше, что линеаризованная связь между основными кинематическими параметрами в аэроавтоупругости описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями порядка не выше второго, с учетом (10) будем иметь

$$\sum_m [a^m_{j0}\varepsilon_m(\tau) + a^m_{j1}\dot{\varepsilon}_m(\tau) + a^m_{j2}\ddot{\varepsilon}_m(\tau)] + a_j =$$

$$= \sum_m b_{jm}\int_0^\tau \dot{\varepsilon}_m(\tau-\tau_1)\,[c_{\varepsilon_m}(\xi, \eta, \zeta, \tau_1)]\,d\tau_1, \quad j = 1, 2, \ldots, G. \tag{11}$$

В выражениях (11) a и b — известные функции времени или коэффициенты, причем переходные функции находятся независимо.

Поступило
6 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Л. Бисплингхофф, Х. Эшли, Р. Л. Халфмэн, Аэроупругость, М., 1958. [2] Я. Ц. Фын, Введение в теорию аэроупругости, М., 1959. [3] С. М. Белоцерковский, Б. К. Скрипач, В. Г. Табачников, Крыло в нестационарном потоке газа, «Наука», 1971.