УДК 517.519.4:513.88

МАТЕМАТИКА

Ю. П. ГИНЗБУРГ, Р. Л. МОГИЛЕВСКАЯ

**О СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ СЖАТИЙ
С МЕДЛЕННО РАСТУЩЕЙ РЕЗОЛВЕНТОЙ**

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 3 IV 1972)

1. Пусть T — сжатие ($\|T\| \leq 1$) с унитарным (т. е. лежащим на единичной окружности) спектром, действующее в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Отнесем T к классу $\Pi^{(1)}$, если

$$\lim_{\rho \uparrow 1} \int_0^{2\pi} \ln^+ \{(1 - \rho) \|(T - \rho e^{i\varphi} I)^{-1}\|\} d\varphi < \infty.$$

Каждому сжатию T в $\mathfrak{H}$ поставим в соответствие его характеристическую функцию $(^2)$

$$\Theta_T(\zeta) = -T + \zeta D_T (I - \zeta T^*)^{-1} D_T | \mathfrak{D}_T,$$

где $D_T = (I - T^* T)^{1/2}$, $\mathfrak{D}_T = \overline{D_T \mathfrak{H}}$.

Нетрудно показать $(^1)$, что $T \in \Pi$ тогда и только тогда, когда все значения $\Theta_T(\zeta)$ при $|\zeta| < 1$ являются ограниченно обратимыми сжатиями из $\mathfrak{D}_T$ на $\mathfrak{D}_T \cdot u$

$$\sup_{0 \leq \rho < 1} \int_0^{2\pi} \ln \|\Theta^{-1}(\rho e^{i\varphi})\| d\varphi < \infty. \quad (1)$$

Отсюда следует, что класс Π совпадает с совокупностью сжатий, имеющих унитарный спектр и характеристическую функцию, обладающую скалярным кратным $(^2)$. В частности, классу Π принадлежат сжатия, подобные унитарному оператору, слабые сжатия T ($\text{sp } D_T^2 < \infty$) с унитарным спектром, а также преобразования Кэли операторов класса Λ $(^3)$.

2. Условие (1) равносильно существованию при $|\zeta| < 1$ наилучшей гармонической мажоранты $u_T(\zeta)$ функции $\ln \|\Theta_T^{-1}(\zeta)\|$:

$$u_T(\zeta) = \int_0^{2\pi} (1 - |\zeta|^2) |\zeta - e^{i\vartheta}|^{-2} d\omega_T(\vartheta),$$

где $\omega_T(\vartheta)$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $\omega_T(0) = 0$, — непрерывная слева неубывающая функция.

Для измеримой функции $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq l$, $0 \leq \varphi(t) \leq 2\pi$, положим

$$\varphi_{a,b}^{(-1)}(\vartheta) = \text{mes} \{t: \varphi(t) < \vartheta, a \leq t \leq b\}, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq a < b \leq l.$$

Функцию $\varphi(t)$ назовем $(^3, ^4)$ ограниченно разрывной, если она представляется в виде суммы непрерывной функции и функции ограниченной вариации, и допустимой, если, кроме того, при любом $t \in [0, l]$

$$\min \left\{ \frac{d}{d\vartheta} \varphi_{0,t}^{(-1)}(\vartheta), \frac{d}{d\vartheta} \varphi_{t,t}^{(-1)}(\vartheta) \right\} = 0$$

почти для всех $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

Теорема 1. а) Если $T \in \Pi$, $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq l = \omega_T(2\pi)$, — произвольная допустимая функция, удовлетворяющая условию $\varphi_0^{(-1)}(\vartheta) = \omega_T(\vartheta)$, то справедливо представление

$$\Theta_T(\zeta) = U \int_0^l \exp\{k[\zeta, \varphi(t)] dE(t)\}, \quad (2)$$

в котором U — изометрия из $\mathfrak{D}_T$ на $\mathfrak{D}_{T^*}$, $E(t)$ — эрмитово-возрастающая (э.в.) на $[0, l]$ функция, $\text{Var} E = t$ (речь идет о вариации в равномерной операторной метрике), $E(0) = 0$, $k(\zeta, \varphi) = (\zeta + e^{i\varphi})(\zeta - e^{i\varphi})^{-1}$.

б) Если характеристическая функция $\Theta_T(\zeta)$ сжатия T допускает представление (2), в котором $E(t)$ — э.в. непрерывная функция, $\text{Var} E < \infty$, $\varphi(t)$ — ограниченно разрывная функция, то $T \in \Pi$.

Эта теорема непосредственно вытекает из результатов (4) (а в случае монотонной $\varphi(t)$ — из (5)).

Следующие теоремы характеризуют класс Π в терминах спектральных функций*.

Теорема 2. Пусть T — действующее в $\mathfrak{H}$ сжатие с унитарным спектром. Если существует спектральная функция $P(t)$, принадлежащая T , и ограниченно разрывная функция $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq l$, такие, что 1) спектр $\sigma(T, P, t', t'')$ каждого из операторов $[P(t'') - P(t')]T$, $[P(t'') - P(t')] \mathfrak{H}$, $0 \leq t' < t'' \leq l$, лежит в $\exp\{i\varphi(t', t'')\}$ (замыкании множества значений $e^{i\varphi(t)}$ на (t', t'')); 2) $\text{spr} D_T^2 < \infty^{**}$, то справедливо треугольное представление

$$T = \int_0^l e^{i\varphi(t)} dP(t) \left\{ I + \int_0^l [I - P(t) D_T^2 P(t)]^{-1} P(t) D_T^2 dP(t) \right\}^{-1} \quad (3)$$

и T принадлежит классу Π .

Заметим, что для всякой спектральной функции $P(t)$, разделяющей спектр (6) оператора T , функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая условию 1), существует и является неубывающей. Для этого случая теорема следует из результатов работ (6, 7) и теоремы 1б), если учесть, что $\text{spr} D_T^2 = \text{Var} D_T P(t) D_T$. Доказательства из (6, 7) переносятся без значительных изменений и на наш случай.

Теорема 3. Пусть вполне неунитарное сжатие T принадлежит Π .

Тогда каждому представлению $\Theta_T(\zeta)$ вида (2), в котором $E(t)$ — э.в. непрерывная функция, $\text{Var} E < \infty$, $\varphi(t)$ — допустимая функция, соответ-

ствует единственная спектральная функция $P(t)$, $0 \leq t \leq l$, оператора T такая, что 1) $\sigma(T, P, t', t'') = \exp\{\varphi(t', t'')\}$, $0 \leq t' < t'' \leq l$, и

2) $D_T P(t) D_T = I - \Theta_T^*(0, t) \Theta_T(0, t)$, $\Theta_T(\zeta, t) = \int_0^t \exp\{k(\zeta, \varphi(t)) dE(t)\}$.

При этом $\text{spr} D_T^2 < \infty$. Среди спектральных функций сжатия T , соответствующих данной функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей условию

* Функция $P(x)$, заданная на $[a, b]$, называется спектральной, если ее значениями являются ортопроекторы в $\mathfrak{H}$, $P(x)$ строго возрастает и сильно непрерывна на $[a, b]$, $P(a) = 0$, $P(b) = I$. Говорят, что $P(x)$ принадлежит оператору T , если все подпространства $P(x) \mathfrak{H}$ инвариантны относительно T .

** Под $\text{spr} H$ (след неотрицательного оператора H вдоль цепочки $\mathfrak{F} = \{P(t)\}_0^l$) подразумевается

$$\sup_j \sum_j \| [P(t_j) - P(t_{j-1})] H [P(t_j) - P(t_{j-1})] \|$$

(sup берется по всевозможным разбиениям $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = l$) (3).

$\varphi_{\tau}^{-1}(\vartheta) = \omega_{\tau}(\vartheta)$ (см. теорему 1(a)), есть единственная экстремальная в следующем смысле: $P(t)\xi$ есть наибольшее из инвариантных для T и T^{-1} подпространств ξ , для которых $\omega_{T|\xi}(\vartheta) \equiv \varphi_{0,t}^{-1}(\vartheta)$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$.

Для доказательства включим T в узел *

$$\alpha = \begin{pmatrix} \mathfrak{H} & T & \mathfrak{H} \\ D_T & & D_{T^*} \\ \mathfrak{D}_T & T^{(0)} & \mathfrak{D}_{T^*} \end{pmatrix}, \quad T^{(0)} = T|_{\mathfrak{D}_T}.$$

Легко видеть, что характеристическая функция узла α совпадает с функцией $\Theta_T(\xi)$.

Пусть $t \in [0, l]$. Вследствие допустимости $\varphi(t)$ почти в каждой точке единичной окружности по крайней мере одна из функций $\Theta_T(\xi, t)$, $\Theta_T(\xi)\Theta_T^{-1}(\xi, t)$ принимает унитарное предельное значение и, значит, как установлено в (8), существует такая проекция α_t узла α на некоторое инвариантное для T подпространство ξ_t , что $\Theta_T(\xi, t) = \Theta_{\alpha_t}(\xi)$. Пусть $P(t)$ — ортопроектор на ξ_t . Легко показать, что $P(t)$, $0 \leq t \leq l$, — спектральная функция. Воспользовавшись теоремой 4 заметки (9) и представлением (2), получим

$$D_T P(t) D_T = I - \Theta_T^*(0, t) \Theta_T(0, t) = 2 \int_0^t \Theta_T^*(0, \tau) dE(\tau) \Theta_T(0, \tau),$$

и, значит, $\operatorname{spr} D_T^2 \leq 2 \operatorname{Var} E < \infty$.

Если $0 \leq t' < t'' \leq l$, то $\sigma(T, P, t', t'')$ совпадает с множеством особенностей функции $\Theta_T(\xi, t'')\Theta_T^{-1}(\xi, t')$, т. е. с $\operatorname{exr} \{i\varphi(t', t'')\}$.

Пусть $P'(t)$ — другая спектральная функция, принадлежащая T и удовлетворяющая условиям теоремы. Используя теорему 2, с помощью вычислений, аналогичных проведенным в (7), убедимся в том, что для некоторой проекции α'_t узла α на $P'(t)\xi$ справедливо равенство $\Theta_{\alpha'_t}(\xi) = \Theta_T(\xi, t)$. Таким образом, $\Theta_{\alpha'_t}(\xi) = \Theta_{\alpha_t}(\xi)$, $0 \leq t \leq l$, и, следовательно (9), $P(t) = P'(t)$, $0 \leq t \leq l$.

Последнее утверждение теоремы вытекает из существования экстремального (нормального) представления $\Theta_T(\xi)$ вида (2) (4, 5) и теоремы 8 статьи (9).

Заметим, что обычно (см., например, (10, 11)) при доказательстве существования цепочек ортопроекторов, разделяющих спектр оператора, используется теорема Ю. И. Любича — В. И. Мацаева (12). Операторы класса Π удовлетворяют условию этого весьма общего предложения. Однако для них, как показывает теорема 3, более полную информацию дает метод факторизации характеристических функций (см. также (3, 4, 2)).

Следствие (из теорем 2 и 3). Для принадлежности вполне неунитарного сжатия T классу Π необходимо и достаточно, чтобы существовала принадлежащая T спектральная функция $P(t)$, разделяющая спектр T и удовлетворяющая условию $\operatorname{spr} D_T^2 < \infty$.

Теорема 4. Для того чтобы сжатие T , удовлетворяющее условию теоремы 2 при дополнительном требовании допустимости $\varphi(t)$, было вполне неунитарным, необходимо и достаточно, чтобы замкнутая линейная оболочка ξ_t множества $\{P(t)D_T h, 0 \leq t \leq l, h \in \mathfrak{H}\}$ совпадала с $\mathfrak{H}$.

Необходимость условия теоремы получается непосредственно из представления (3) оператора T и того, что подпространство $\mathfrak{H}_0$, в котором индуцируется вполне неунитарная часть сжатия T , совпадает с замыканием линейной оболочки векторов $T^n D_T f$ ($f \in \mathfrak{H}$, $n = 0; \pm 1; \dots$).

Для доказательства достаточности перейдем, как в (7), от (3) к мультипликативному представлению вида (2) функции $\Theta_T(\xi)$; при этом

* Здесь и ниже мы пользуемся терминологией статьи (8).

$D_T P(t) D_T = I - \Theta_T^*(0, t) \Theta_T(0, t)$, $0 \leq t \leq l$. Так как $\Theta_T(\zeta)$ является одновременно характеристической функцией вполне неунитарной части $T_0 = T/\xi_0$ сжатия T , то упомянутое мультипликативное представление $\Theta_T(\zeta)$ порождает, на основании теоремы 3, спектральную функцию $P_0(t)$ для T_0 . Воспользовавшись условием 2') этой теоремы, получим, что

$$(P_0(t) D_T f, P_0(\tau) D_T g) = (P(t) D_T f, P(\tau) D_T g)$$

для любых $f, g \in \xi$ и $t, \tau \in [0, l]$ и, значит, можно определить изометрию V пространства $\xi (= \xi_t)$ на ξ_0 , удовлетворяющую условиям $V P(t) D_T h = P_0(t) D_T h$, $h \in \xi$, $0 \leq t \leq l$. Легко видеть, что $V^{-1} P_0(t) V = P(t)$, $0 \leq t \leq l$. Записав для T и T_0 представления вида (3), получим $T = V^{-1} T_0 V$, что и доказывает полную неунитарность T , а вместе с тем и теорему.

Теорема 4, которая является новой даже для случая разделяющей спектр функции $P(t)$ и $\dim \overline{D_T \xi} < \infty$, может быть применена к исследованию треугольных моделей ⁽¹³⁾ сжимающих операторов.

Одесский педагогический институт
им. К. Д. Ушинского

Поступило
17 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. П. Гинзбург, Матем. исслед., Кишинев, 5, в. 4 (1970). ² Б. Секе-Фальви-Надь, Ч. Фояш, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, М., 1970. ³ Ю. П. Гинзбург, Р. Л. Могилевская, Функци. анализ и его прилож., 3, в. 4 (1969). ⁴ Р. Л. Могилевская, Матем. исслед., Кишинев, 4, в. 4 (1969). ⁵ Ю. П. Гинзбург, Функци. анализ и его прилож., 1, в. 3 (1967). ⁶ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, там же, 1, в. 1 (1967). ⁷ В. М. Бродский, И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, там же, 3, в. 4 (1969). ⁸ В. М. Бродский, Я. С. Шварцман, ДАН, 201, № 3 (1971). ⁹ В. М. Бродский, ДАН, 198, № 1 (1971). ¹⁰ М. С. Бродский, ДАН, 133, № 6 (1960). ¹¹ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, ДАН, 164, № 4 (1965). ¹² Ю. И. Любич, В. И. Мацаев, Матем. сборн., 56 (98), № 4 (1962). ¹³ В. Т. Поляцкий, ДАН, 113, № 4 (1957).