Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 3

УДК 519.513

МАТЕМАТИКА

А. В. ПОТЕПУН

ОБОБЩЕННАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ K-ЛИНЕАЛОВ И СВОЙСТВА ПОРЯДКОВОЙ ТОПОЛОГИИ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 12 IV 1972)

При изучении свойств линейных структур (K-линеалов) и булевых алгебр существенно используются различные топологии, определяемые упорядочением. В данной статье рассматривается одна из них — (o)-топология (см. ([1]), стр. 46; ([2]), стр. 132). Результаты будут формулироваться только для K-линеалов, однако все они (с соответствующими изменениями в формулировках) верны и для булевых алгебр.

Определение 1. Пусть X — K-линеал. Направление $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $x_\alpha\in X$, называется (o)-сходящимся к пределу $x\in X$, если в X существуют направления $\{y_\beta\}_{\beta\in B}$ и $\{z_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ со свойствами:

1) $\{y_\beta\}$ возрастает, $\{z_\gamma\}$ убывает;

2) $x=\sup\{y_\beta\}=\inf\{z_\gamma\}$;

3) для любых $\beta\in B$ и $\gamma\in\Gamma$ существует такое $\alpha_0\in A$, что $y_\beta\leqslant x_\alpha\leqslant z_\gamma$ при всех $\alpha\geqslant\alpha_0$ (см. ([1]), стр. 41).

Определение 2. Множество $F\subset X$ называется замкнутым в (o)-топологии $\tau^0(X)$, если предел всякого (o)-сходящегося направления элементов из F также содержится в F.

Определение 3. K-линеал X называется регулярным, если X счетного типа и (o)-сходимость в X удовлетворяет «принципу диагонали»: если для $n=1,2,\ldots$ $x_{nm}\downarrow 0$ $(m\to\infty)$, то существует диагональная последовательность $x_{nm_n}\xrightarrow{(o)}0$ $(n\to\infty, m_n\uparrow)$.

Замечание. В ([1]) и ([3]) для K-пространств даны другие определения регулярности, но, как доказано в ([3]), стр. 175, они равносильны определению 3.

Определение 4. Назовем K-линеал X обобщенно регулярным, если для любого множества $A\subset X$ его замыкание в (o)-топологии получается так:

$$\bar{A}=\{x\in X\,|\,x=(o)-\lim x_\alpha,\ x_\alpha\in A\}.$$

Можно сформулировать аналог принципа диагонали и для структур несчетного типа (напомним, что типом K-линеала X называется кардинальное число t — верхняя грань мощностей ограниченных подмножеств X, состоящих из попарно дизъюнктных элементов). Если t — тип K-линеала X, то обозначим через $A(t)$ множество всех конечных подмножеств множества мощности t, упорядоченное по включению. Будем говорить, что в X выполнен обобщенный принцип диагонали, если из того, что для любого $\alpha\in A(t)$ направление $x_{\alpha\beta}\downarrow 0$ по β, $\beta\in A(t)$, следует существование диагонального направления $x_{\alpha\beta_\alpha}\xrightarrow{(o)}0$ (индексы β_α возрастают по α).

1. Связь обобщенного принципа диагонали с обобщенной регулярностью ясна из следующей теоремы.

Теорема 1. а) *Если в X выполнен обобщенный принцип диагонали, то X обобщенно регулярен*; б) *Если X — обобщенно регулярен и содержит ограниченное дизъюнктное подмножество мощности, равной типу X, то в X выполнен обобщенный принцип диагонали.*

Если X счетного типа, то $A(t)$ не является последовательностью и поэтому обобщенный принцип диагонали формально отличается от обычного принципа диагонали. Однако верна следующая

Теорема 2. *Если X счетного типа, то выполнение обобщенного принципа диагонали равносильно выполнению обычного принципа диагонали и обобщенная регулярность X равносильна его обычной регулярности**.

Пусть X — архимедов K-линеал. Обозначим через $\hat{X}$ его пополнение с помощью сечений.

Теорема 3. *$\hat{X}$ обобщенно регулярен тогда и только тогда, когда этим же свойством обладает X.*

Так как X естественно вкладывается в $\hat{X}$, то в X можно рассматривать две топологии: $\tau^0(X)$ и $\tau^0(\hat{X})\,|_X$ — индуцированную на X топологией $\tau^0(\hat{X})$. Легко доказать, что $\tau^0(X)$ сильнее (в нестрогом смысле), чем $\tau^0(\hat{X})\,|_X$.

Теорема 4. *Если X (или $\hat{X}$) обобщенно регулярен, то $\tau^0(X) = \tau^0(\hat{X})\,|_X$.*

2. Пусть X — K-линеал (булева алгебра) и топология $\tau^0(X)$ имеет счетный базис окрестностей нуля. Таким свойством обладает, например, (o)-топология нормируемых булевых алгебр (см. [2], стр. 204) и KB-пространств ([1], стр. 209).

Теорема 5. *Если у $\tau^0(X)$ есть счетный базис окрестностей нуля, то X регулярен.*

Теорема 6. *$\tau^0(\hat{X})$ имеет счетный базис окрестностей нуля тогда и только тогда, когда $\tau^0(X)$ обладает этим свойством.*

3. В этом пункте рассмотрим K-линеал, в котором $\tau^0(X)$ обладает базисом нормальных окрестностей нуля (нормальным называется множество $P \subset X$ такое, что $x \in P$ и $|y| \leqslant |x| \Rightarrow y \in P$. Если же X — булева алгебра, то нормальным называется множество P со свойством: $x \in P$ и $y \leqslant x \Rightarrow y \in P$). Нормальный базис, например, всегда существует в KB-пространствах и нормируемых булевых алгебрах. Следующая теорема описывает довольно широкий класс K-линеалов с базисом нормальных окрестностей нуля, включающий класс KB-пространств.

Теорема 7. *Если X обобщенно регулярен, то у $\tau^0(X)$ существует базис нормальных окрестностей нуля.*

Следующее предложение показывает, какова роль базиса нормальных окрестностей нуля при изучении (o)-топологии.

Предложение 1. *Пусть X — архимедов K-линеал, операция сложения непрерывна в $\tau^0(X)$ по совокупности переменных и $\tau^0(X)$ обладает базисом нормальных окрестностей нуля.*

Тогда $(X, \tau^0(X))$ — линейное топологическое пространство.

Для архимедова K-линеала, у которого (o)-топология обладает базисом нормальных окрестностей нуля, справедлива теорема, близкая к теореме 4.

Теорема 8. *Если $\tau^0(X)$ имеет базис нормальных окрестностей нуля, то $\tau^0(\hat{X})$ обладает этим же свойством и $\tau^0(X) = \tau^0(\hat{X})\,|_X$.*

4. Рассмотрим некоторое семейство $\{X_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ K-линеалов и декартово произведение $\prod\limits_{\xi\in\Xi} X_\xi$ этого семейства с покоординатным упорядочением (также употребляется термин «полное соединение», см. [3], стр. 69). В нем можно рассматривать две топологии: (o)-топологию произведения и тихоновское произведение $\prod\limits_{\xi\in\Xi} \tau^0(X_\xi)$ (o)-топологий K-линеалов семейства. Легко доказывается, что $\tau^0\,(\prod\limits_{\xi\in\Xi} X_\xi)$ сильнее (нестрого), чем $\prod\limits_{\xi\in\Xi}\tau^0(X_\xi)$. Однако вообще говоря эти топологии не совпадают. Даже равенство $\tau^0(X \times$

* Можно показать, что, например, все атомические булевы алгебры обобщенно регулярны.

$\times X) = \tau^0(X) \times \tau^0(X)$ справедливо лишь при выполнении некоторых других полезных свойств топологии $\tau^0(X)$.

Теорема 9. *Пусть X — K-линеал со свойством $\tau^0(X \times X) = \tau^0(X) \times \tau^0(X)$. Тогда*: 1) *топология $\tau^0(X)$ хаусдорфова*;

2) *если для любого $\alpha \in A$ $x_\alpha \geqslant y_\alpha$, $x_\alpha \xrightarrow{\tau^0} x$, $y_\alpha \xrightarrow{\tau^0} y$, то $x \geqslant y$ (переход к топологическому пределу в неравенствах)*;

3) *операции $+$, $\vee$, $\wedge$, Δ (Δ — симметрическая разность в булевой алгебре) непрерывны в $\tau^0(X)$ по совокупности переменных.*

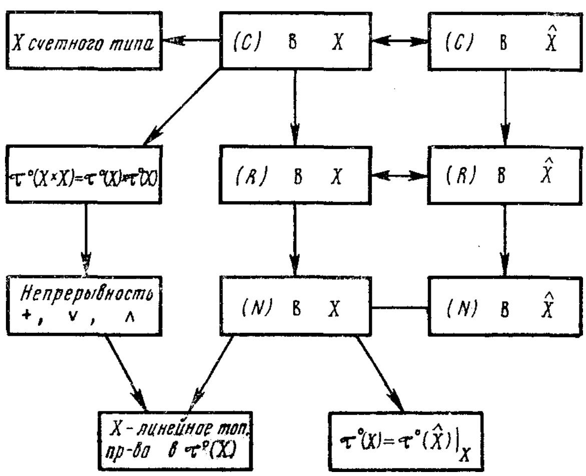
Как известно, (o)-топология не всегда обладает свойствами 1) — 3) (например, в булевой алгебре регулярных открытых множеств отрезка $[0, 1]$ (o)-топология не хаусдорфова, см. ([4])). Из теоремы 9 следует, что для этой булевой алгебры $\tau^0(X \times X)$ строго сильнее, чем $\tau^0(X) \times \tau^0(X)$. Следующая теорема выделяет класс K-линеалов, в которых (o)-топология в произведении совпадает с тихоновской.

Теорема 10. *Пусть $\{X_n\}$ — конечное или счетное семейство K-линеалов и для любого n топология $\tau^0(X_n)$ имеет счетный базис окрестностей нуля. Тогда τ^0 $(\prod X_n)$ тоже имеет счетный базис окрестностей нуля и при этом* $\tau^0\left(\prod\limits_n^n X_n\right) = \prod\limits_n \tau^0(X_n)$.

Теорема 11. *Пусть X — архимедов K-линеал (булева алгебра) и $\tau^0(X)$ имеет счетный базис окрестностей нуля.*

Тогда X — метризуемое линейное топологическое пространство (X — метризуемая топологическая группа по операции симметрической разности) в топологии $\tau^0(X)$. При этом метрику можно выбрать монотонной: $|x| \leqslant |y| \Rightarrow \rho(0, x) \leqslant \rho(0, y)$ для K-линеала и $x \leqslant y \Rightarrow \rho(0, x) \leqslant \rho(0, y)$ для булевой алгебры.

Приведем схему связей между изложенными выше результатами:



Здесь (C) означает существование счетного базиса окрестностей нуля у (o)-топологии, (R) — обобщенная регулярность, (N) — существование у (o)-топологии базиса нормальных окрестностей нуля.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
4 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961. [2] Д. А. Владимиров, Булевы алгебры, М., 1969. [3] Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.— Л., 1950. [4] E. Floyd, Pacific J. Math., 5, 687 (1955).