Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 2

УДК 517.948.32 **МАТЕМАТИКА**

Б. С. РУБИН

ОБ ОПЕРАТОРАХ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ КОНТУРЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 27 III 1972)

В настоящей заметке исследуется вопрос о нётеровости оператора типа потенциала

$$(K\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\Omega}\frac{c(x,y)}{|x-y|^{1-\alpha}}\varphi(y)\,dy,\quad x\in\Omega,\tag{1}$$

где $0<\alpha<1$, в качестве Ω берется вся вещественная ось, ее конечный отрезок, полуось, совокупность полуосей и конечного числа отрезков. Функция $c(x,y)$ кусочно непрерывна на $\Omega\times\Omega$ с разрывами на диагонали $y=x$ и на прямых $y=a_k$, $a_k\in\Omega$, $k=1,2,\ldots,n$. В случае, когда $c(x,y)$ разрывна только на диагонали, нётеровость оператора (1) из $L_p(\Omega)$ в пространство $I^\alpha(L_p)$ для $\Omega=(-\infty,\infty)$ была показана С. Г. Самко в ([1]). На конечном отрезке этот вопрос исследовался в работах ([2]) и ([5]). В настоящей статье получены необходимые и достаточные условия нётеровости и вычислен индекс оператора K, действие которого рассматривается из весового пространства $L_p(\Omega,\rho)$ p-суммируемых на Ω функций в пространство дробных интегралов $I^\alpha(L_p(\Omega,\rho))$ (см. п. 1°). Заметим, что допущение у функции $c(x,y)$ разрыва на прямых $y=a_k$ позволяет исследовать операторы типа потенциала «с конечным числом ядер»

$$(K_n\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{c_k(x,y)}{|x-y|^{1-\alpha}}\varphi(y)\,dy,\quad x\in\bigcup_k\,[a_k,a_{k+1}].$$

Пусть $a_1,\ldots,a_n$ — некоторые точки на Ω, среди которых находятся концы всех интервалов, составляющих Ω. Обозначим через $V^\lambda(\Omega;a_1,\ldots,a_n)$ класс функций $c(x,y)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $c(x,y)$ кусочно непрерывна с разрывами первого рода на прямых $y=a_k$, $k=1,2,\ldots,n$, и на диагонали $y=x$: $c(x,y)=\{u(x,y),x>y;\ v(x,y),x<y\}$, а функции $u(x)=u(x+0,x)$, $v(x)=v(x-0,x)$ кусочно непрерывны на Ω с точками разрыва a_k;

2) имеет место условие Гёльдера вида

$$|u(x_1,y)-u(x_2,y)|\leqslant M\frac{|x_1-x_2|^\lambda}{(1+|x_1|)^\lambda(1+|x_2|)^\lambda},\quad x_1,x_2\leqslant y,$$

где константа M не зависит от y. Аналогичное неравенство должно выполняться для функции $v(x,y)$ при $x_1,x_2\geqslant y$.

Кроме этих двух условий в случае, когда в Ω входят две полуоси, не имеющие общих точек (кроме бесконечно удаленной), мы введем еще условие склеивания значений функций $u(x,y)$, $v(x,y)$ на бесконечности:

3) $u(\infty,-\infty)=v(-\infty,-\infty)$; $u(\infty,\infty)=v(-\infty,\infty)$,

которое следует понимать в следующем смысле: для функций $|u(x,y)-v(\xi,y)|$, $\xi<y$, и $|u(\xi,y)-v(x,y)|$, $\xi>y$, по любому $\varepsilon>0$ найдется такое число N, не зависящее от ξ, что при $x>N$, $y<-N$ $|u(x,y)-v(\xi,y)|<\varepsilon$, а при $x<-N$, $y>N$ $|u(\xi,y)-v(x,y)|<\varepsilon$.

Далее, пусть $\Omega = [a, b]$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. Введем операторы дробного интегрирования

$$(I_{\Omega+}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad (I_{\Omega-}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \tag{2}$$

и дробного дифференцирования

$$(I_{\Omega+}^{-\alpha}f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^{x} \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt, \quad (I_{\Omega-}^{-\alpha}f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^{\infty} \frac{f(x)-f(t)}{(t-x)^{1+\alpha}}\,dt.$$

(В последних равенствах при $x \notin \Omega$ полагается $f(x) = 0$ и сходимость интегралов понимается в метрике $L_r(\Omega)$ при некоторых $r > 1$.)

1°. Пусть $\Omega = [a, b]$ — конечный отрезок, $a_1, \ldots, a_n$ — некоторые фиксированные точки на $[a, b]$, $a = a_1 < \ldots < a_n = b$, $\rho(x) = \prod_{k=1}^{n} |x - a_k|^{\alpha_k}$,

$$\alpha p - 1 < \alpha_1, \alpha_n < p - 1; \quad -1 < \alpha_k < p - 1, \quad k = 2, \ldots, n-1;$$
$$1 < p < \infty. \tag{3}$$

Через $I^{\alpha}(L_p(\Omega, \rho))$ будем обозначать область значений операторов (2) (при выполнении условий (3) области $I_{\Omega+}^{\alpha}(L_p(\Omega, \rho))$, $I_{\Omega-}^{\alpha}(L_p(\Omega, \rho))$ совпадают (ср. ([1], [3])). Описание этих областей для конечного отрезка дает

Теорема 1. *Для того чтобы функция f была представима в виде $f = I_{\Omega+}^{\alpha}\varphi$ $(f = I_{\Omega-}^{\alpha}\varphi)$, $\varphi \in L_p(\Omega, \rho)$, $\rho(x) = \prod_{k=1}^{n} |x - a_k|^{\alpha_k}$, $-1 < \alpha_k < p - 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

1) $f \in L_r(\Omega)$, *где* $1 < r < \min\limits_k \left(p, \dfrac{p}{1+\alpha_k}\right)^{*}$;

2) *в* $L_p(\Omega, \rho)$ *существует предел*

$$A(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ L_r}} \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt$$

$$\left(A(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ L_r}} \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)-f(t)}{(t-x)^{1+\alpha}}\,dt\right)$$

(вне Ω полагаем $f = 0$). Если эти условия выполнены, то $\varphi(x) \overset{\text{p.p.}}{=} A(x)$.

Для пространства $L_p(-\infty, \infty)$ аналогичная теорема, дающая описание областей значений дробных интегралов, была получена в ([1]). На конечном отрезке для пространства $L_p(a, b)$ этот результат был установлен в ([5]).

Пространство $I^{\alpha}(L_p(\Omega, \rho))$ банахово относительно норм $\|f\|_1 = \|I_{\Omega+}^{-\alpha}f\|_{L_p(\Omega,\rho)}$; $\|f\|_2 = \|I_{\Omega-}^{-\alpha}f\|_{L_p(\Omega,\rho)}$. Исследование оператора (1) на нётеровость из $L_p(\Omega, \rho)$ в $I^{\alpha}(L_p(\Omega, \rho))$ проводится по той же схеме, что и в ([1]): оператор K представляется в виде $K = I_{\Omega+}^{\alpha} r_a^{-1} N r_a + T$, где $r_a(x) = (x-a)^{\alpha}$, N — сингулярный интегральный оператор с ядром Коши, T — вполне непрерывный оператор. Применяя к оператору N результаты И. Ц. Гохберга и Н. Я. Крупника ([4]), получаем следующую основную теорему.

* В необходимой части формулировки теоремы под r понимается любое число из указанного промежутка, в достаточной части — какое-нибудь одно число.

Теорема 2. *Пусть* $c(x,y)\in V^{\lambda}(\Omega;a_1,\ldots,a_n)$, где $\lambda>\alpha$. *Для того чтобы оператор* K *был нётеровым из* $L_p(\Omega,\rho)$ *в* $I^{\alpha}(L_p(\Omega,\rho))$, *необходимо и достаточно выполнения следующих условий*:

1) $\inf|u(x)+v(x)e^{-i\alpha\pi}|>0,\quad x\in\Omega;$

2) *функция*

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{u(x)+v(x)e^{i\alpha\pi}}{u(x)+v(x)e^{-i\alpha\pi}}, & x\in\Omega;\\ 1, & x\in[-\infty,\infty]\setminus\Omega,\end{cases}$$

является ω-*неособенной* ([4]), *где* $\omega=(p,\alpha_1-\alpha p,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$. *При выполнении этих условий индекс оператора* K *равен* ω-*индексу* ([4]) *функции* $G(x)$.

Формулу для индекса можно также записать в терминах скачков аргумента функции $G(x)$.

Рассмотрим теперь случай, когда Ω является полуосью, например, $\Omega=(-\infty,a)$. Положим

$$\rho(x)=(1+|x|)^{\gamma}\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|^{\alpha_k},\tag{4}$$

$$\alpha p-1<\gamma+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k,\quad \alpha_n<p-1;\quad -1<\alpha_k<p-1,\ k=1,2,\ldots,n-1.\tag{5}$$

Пространство $I^{\alpha}(L_p(\Omega,\rho))$ при этих условиях определяется по тому же принципу, что и на конечном отрезке. Этот случай сводится к предыдущему заменой $x_1=1/(x-a-\delta)$, где $\delta>0$. Необходимые и достаточные условия нётеровости оператора K дает теорема 2, в которой вектор ω имеет вид

$$\omega=\left(p,\ \gamma+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k,\ \alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\ \alpha_n-\alpha p\right).$$

Если Ω совпадает со всей вещественной прямой и вес $\rho(x)$ имеет вид (4), то критерий нётеровости оператора K получается тем же методом, что и в ([1]): оператор K представляется в виде $K=I_{\Omega+}{}^{\alpha}B^{-1}NB+T$, где $(B\varphi)(t)=(t+1)^{-1}\varphi\left(i\frac{1-t}{1+t}\right)$, N — сингулярный интегральный оператор с ядром Коши на единичной окружности, T — вполне непрерывный оператор. Формулируются условия нётеровости так же, как и в теореме 2, где $\omega=\left(p,p-2-\gamma-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k,\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right)$.

В случае, когда $\rho(x)=(1+|x|)^{\gamma}$, $\alpha p-1<\gamma<p-1$, и функции $u(x)$, $v(x)$ удовлетворяют на всей оси условию Гёльдера порядка $\lambda>\alpha$, для оператора K удается построить ограниченный регуляризатор. Он имеет вид

$$(Rf)(x)=u_1(x)I_{\Omega+}^{-\alpha}f+v_1(x)I_{\Omega-}^{-\alpha}f,$$

где

$$u_1(x)=u(x)[u^2(x)+v^2(x)+2u(x)v(x)\cos\alpha\pi]^{-1};$$
$$v_1(x)=v(x)[u^2(x)+v^2(x)+2u(x)v(x)\cos\alpha\pi]^{-1}.$$

2°. Рассмотрим отдельно случай, когда Ω состоит из двух полуосей, для которых бесконечно удаленная точка является единственной общей точкой: $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, где $\Omega_1=(-\infty,a)$, $\Omega_2=(b,\infty)$, $a<b$. Вес $\rho(x)$ определяется формулой (4), где $\alpha p-1<\gamma+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$, $\alpha_m,\alpha_{m+1}<p-1$; $-1<\alpha_k<p-1$, $k=1,2,\ldots,n$. Здесь через α_m, α_{m+1} обозначены те по-

…азатели степеней, которые соответствуют точкам $a_m = a$ и $a_{m+1} = b$. Пусть $f_i(x)$ есть сужение функции $f(x)$, заданной на Ω, на множество Ω_i, $i = 1, 2$. Будем говорить, что $f(x) \in I^\alpha(L_p(\Omega, \rho))$, если $f_i(x) \in I^\alpha(L_p(\Omega_i, \rho))$. Пространство $I^\alpha(L_p(\Omega, \rho))$ банахово относительно нормы

$$\|f\| = \|I_{\Omega+}^{-\alpha} f\|_{L_p(\Omega, \rho)},$$

где

$$I_{\Omega+}^{-\alpha} f = \begin{cases} I_{\Omega_1+}^{-\alpha} f_1, & x \in \Omega_1, \\ I_{\Omega_2+}^{-\alpha} f_2, & x \in \Omega_2. \end{cases}$$

Преобразование $\xi = (b-a) / (2x - b - a)$ переводит множество Ω в отрезок $\bar{\Omega} = [-1, 1]$, а функцию $c(x, y)$ класса $V^\lambda(\Omega; -\infty, a_1, \ldots, a_n, \infty)$ в функцию $\bar{c}(\xi, \eta)$ класса $\bar{V}^\lambda(\Omega, -1, \bar{a}_{m-1}, \ldots, \bar{a}_1, 0, \bar{a}_n, \ldots, \bar{a}_{m+2}, 1)$, где точки $\bar{a}_k$ соответствуют точкам a_k, а точка 0 — бесконечно удаленной точке. Оператор K представляется в виде $K = N_1 \bar{K} N_2$, где

$$(N_1\varphi)(x) = \left|\frac{b-a}{2x-b-a}\right|^{1-\alpha} \varphi\left(\frac{b-a}{2x-b-a}\right);$$

$$(\bar{K}\psi)(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\bar{\Omega}} \frac{\bar{c}(\xi, \eta)}{|\xi - \eta|^{1-\alpha}} \psi(\eta)\, d\eta;$$

$$(N_2\varphi)(\xi) = |\xi|^{1-\alpha} \xi^{-2} \varphi\left(\frac{b-a}{2\xi} + \frac{b+a}{2}\right).$$

Оператор N_2 гомеоморфно отображает $L_p(\Omega, \rho)$ на $L_p(\bar{\Omega}, \bar{\rho})$, где $\bar{\rho}(\xi) = |\xi|^\beta \prod\limits_{k=1}^{n} |\xi - \bar{a}_k|^{\alpha_k}$, $\beta = p + \alpha p - 2 - \gamma - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$, $\alpha p - 1 < \beta < p - 1$, а оператор N_1 гомеоморфно отображает $I^\alpha(L_p(\bar{\Omega}, \bar{\rho}))$ на $I^\alpha(L_p(\Omega, \rho))$.

Таким образом, нётеровость оператора K эквивалентна нётеровости оператора $\bar{K}$. Условия нётеровости дает теорема 2, в которой вектор ω имеет вид $\omega = (p, \beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_m - \alpha p, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n)$.

В заключение выражаю искреннюю благодарность С. Г. Самко за руководство работой.

Поступило
20 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Самко, ДАН, 196, № 2, 299 (1971). [2] С. Г. Самко, Дифференциальные уравнения, 4, № 2, 315 (1968). [3] С. Г. Самко, там же, 4, № 2, 298 (1968). [4] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, ДАН, 185, № 4, 745 (1969). [5] Б. С. Рубин, Изв. высш. учебн. завед., № 11, 71 (1971).