

Э. Р. РОЗЕНДОРН

НЕКОТОРЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РЕГУЛЯРНОСТИ
ПОВЕРХНОСТИ С ПОСТОЯННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ
ВНУТРЕННЕЙ КРИВИЗНОЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 30 III 1972)

1°. В трехмерном евклидовом пространстве E_3 рассмотрим гладкую седловую поверхность S , у которой гауссово сферическое отображение локально гомеоморфно. Пусть на S имеется замкнутое множество $\mathfrak{M}$ линейной меры нуль, вне которого поверхность регулярна. Мы выведем регулярность всей поверхности S из предположения, что ее внутренняя метрика ds^2 регулярна повсеместно. Однако при этом в связи со сложностью техники вспомогательных конструкций, приходится наложить ряд добавочных условий. Из них мы отметим здесь постоянство гауссовой кривизны K метрики ds^2 . Точную формулировку результатов см. ниже, пункты 5°, 6°.

Метод доказательства основан на аппроксимации нормального (или сферического) отображения поверхности регулярными отображениями специального вида.

2°. Пусть G — ограниченная односвязная область на S , и пусть $\mathfrak{M} \subset G$. Предположим, что на множестве $G \setminus \mathfrak{M}$ поверхность регулярна настолько, что определены ее асимптотические линии и что в $G \setminus \mathfrak{M}$ существуют дуги l_1, l_2, l_3, l_4 асимптотических линий, удовлетворяющие следующим условиям:

1) дуги $l_j, j = 1, \dots, 4$, вместе с их концевыми точками образуют кривую Γ , гомеоморфную окружности, и занумерованы в порядке обхода линии Γ ;

2) l_1 и l_3 имеют геодезическое кручение одного знака, l_2 и l_4 — геодезическое кручение противоположного знака;

3) линия Γ ограничивает некоторую область D («асимптотический четырехугольник»), причем $\mathfrak{M} \subset D, D \cup \Gamma \subset G, \Gamma \cap \mathfrak{M} = \emptyset$.

3°. Пусть $U_1, \dots, U_m$ — какое-нибудь конечное покрытие множества $\mathfrak{M}$ открытыми геодезическими кругами U_i . Обозначим через O_i центр круга U_i , через ρ_i — его геодезический радиус, через ρ_{ij} — расстояние на S между O_i и O_j .

Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ покрытие $U_1, \dots, U_m, m = m(\varepsilon)$, множества $\mathfrak{M}$ можно выбрать так, что

$$1) \sum_{i=1}^m \rho_i < \varepsilon;$$

2) $\rho_{ij} > (1+c)(\rho_i + \rho_j)$, где $c > 0$ — некоторое число, не зависящее от ε . (Здесь $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, m; i \neq j$.)

Первое из этих условий означает, что $\mathfrak{M}$ имеет линейную меру Хаусдорфа, равную нулю. Второе означает, что покрытия, у которых $\sum \rho_i < \varepsilon$, можно строить из попарно неналегающих кругов U_i , которые остаются попарно неналегающими после увеличения их радиусов в $(1+c)$ раз. Нетрудно указать примеры несчетных множеств, удовлетворяющих обоим этим требованиям.

4°. Гладкую поверхность S (класса C^1) будем называть локально гиперболической, если каждая ее точка имеет окрестность, в которой гаус-

сово сферическое отображение гомеоморфно и меняет ориентацию. (По поводу такой терминологии и свойств таких поверхностей см. (1, 4).)

5°. Будем считать, что S — гладкая локально гиперболическая поверхность и что множества G , D и $\mathbb{M}$ на ней удовлетворяют условиям пунктов 2°, 3°. Тогда имеют место формулируемые ниже теоремы.

Теорема 1. Пусть внутренняя метрика поверхности S имеет гауссову кривизну $K = -1$. Пусть, кроме того, в области $S \setminus \mathbb{M}$ поверхность S имеет регулярность C^3 и ограниченную среднюю кривизну H ($|H| \leq H_0 = \text{const}$), а градиент средней кривизны допускает оценку вида $|\text{grad } H| \leq M\rho^{-1}$, где ρ — расстояние до множества $\mathbb{M}$. Существует $M_0 = M_0(c, H_0) > 0$ такое, что $S \in C^3$ всюду в D , если $M \leq M_0$.

Теорема 2. Если в условиях теоремы 1 дополнительно потребовать, чтобы на двух соседних сторонах l_i асимптотического четырехугольника D геодезическая кривизна как функция длины дуги имела регулярность C^n , $n \geq 1$, то $S \in C^{n+3}$ всюду внутри D .

Доказательство теоремы 1 опирается на две леммы, сформулированные ниже. Теорема 2 следует из теоремы 1 и результатов работы (3).

Замечание. Если на среднюю кривизну H в области $G \setminus \mathbb{M}$ никаких условий не накладывать, то нельзя гарантировать регулярность поверхности S на множестве $\mathbb{M}$, даже если оно состоит из единственной точки (см. (3), стр. 169—170).

6°. Введем вспомогательные обозначения. Пусть дано отображение

$$p = p(x, y), \quad q = q(x, y) \quad (1)$$

какой-либо области X на плоскости xu в плоскость pq . Положим

$$J = q_x - p_y, \quad \Delta = \frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)}, \quad \mu = (1/4 J^2 - \Delta)^{-1/2}, \quad \nu = 1/2 J\mu. \quad (2)$$

Здесь и ниже производные (по соответствующим переменным) обозначены буквенными индексами снизу.

Пусть S — гладкая локально гиперболическая поверхность вида $z = f(x, y)$, внутренняя метрика которой имеет постоянную гауссову кривизну $K = -1$. Будем предполагать для упрощения формулировок, что функция $f(x, y)$, заданная в некоторой области X плоскости xu , удовлетворяет неравенству $|\text{grad } f| < 1$. Обозначим через F нормальное отображение поверхности S , т. е. отображение $p = -f_x$, $q = -f_y$ области X в плоскость pq .

Условимся, обозначая буквой какую-нибудь фигуру на S , той же буквой со штрихом обозначать проекцию этой фигуры на плоскость xu . Пусть на S даны: точка O , геодезический круг V с центром O и радиусом ρ , а также гладкие дуги L_1 и L_2 длины l , $0 < l < \rho$, серединой которых служит точка O , образующие в точке O угол ω , $\sin \omega > 0$. Имеет место

Лемма 1. Пусть существуют окрестности V_1 и V_2 дуг L_1 и L_2 , в которых $S \in C^3$, причем сами линии L_1 и L_2 являются асимптотическими линиями поверхности S . Пусть, кроме того, нормальное отображение F поверхности S допускает в области V' сколь угодно точную равномерную аппроксимацию гомеоморфным отображением вида (1) класса C^2 , которое

- имеет отрицательный якобиан $\Delta < 0$;
- совпадает с F на $V_1' \cup V_2'$;
- удовлетворяет условию*

$$\iint_{V'} (|1 + p^2 + q^2 - \mu^{-1}| + |\mu_p \Delta - 2p| + |\mu_q \Delta - 2q| + |\nu_x| + |\nu_y|) dx dy < \varepsilon, \quad (3)$$

где ε — сколь угодно малое наперед заданное положительное число.

* Для нормального отображения имеем $J = \mu = 0$; если же S регулярна и $K = -1$, то $\mu^{-1} = (|\Delta|)^{1/2} = 1 + p^2 + q^2$, так что $\mu_p \Delta = 2p$, $\mu_q \Delta = 2q$.

Тогда существует окрестность U точки O , в которой $S \in C^3$. Кроме того, существует число $l_0 > 0$, зависящее от $\sin \omega$ и от геодезической кривизны линий L_1 и L_2 , такое, что внутри U содержится замкнутый асимптотический четырехугольник $\bar{D}$ со сторонами длины l_0 и центром в точке O , если только $l > l_0$.

7°. Для доказательства леммы 1 последовательно устанавливаются следующие факты.

А) Пусть дана система уравнений вида

$$x_{uv} = A(x, y) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad y_{uv} = B(x, y) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad (4)$$

где A, B непрерывны в достаточно большом круге R вида $x^2 + y^2 \leq r^2$. Тогда задача Дарбу для системы (4) с непрерывными начальными условиями, заданными при $u = 0$ и при $v = 0$, имеет в некотором квадрате Q_a вида $|u| < a, |v| < a$ единственное решение $\{x(u, v), y(u, v)\}$, удовлетворяющее условию $\partial(x, y) / \partial(u, v) > 0$. Число $a > 0$ допускает оценку снизу через максимумы модулей начальных данных задачи и коэффициентов A и B .

Б) В некоторой окрестности точки O на S существуют такие криволинейные координаты u, v , в которых декартовы координаты x и y текущей точки поверхности удовлетворяют системе вида (4) при $A = -f_u, B = -f_v$, причем $u = 0$ на $L_1, v = 0$ на L_2 .

В) Пусть в области X на плоскости xu задано гомеоморфное отображение $\bar{F}$ вида (1) класса C^2 с отрицательным якобианом $\Delta < 0$ и введены такие криволинейные координаты u, v , что u -линии и v -линии являются характеристиками отображения $\bar{F}$ (определение характеристик отображения см. (2)). Тогда имеют место соотношения $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$, где $\{\varphi, \psi\}$ — некоторое решение системы вида (4) с коэффициентами

$$A = -1/2(\mu_v \Delta + v_v), \quad B = -1/2(\mu_u \Delta - v_u) \quad (5)$$

(μ и v определяются формулами (2)).

Г) Пусть $\{x_n(u, v), y_n(u, v)\}$ — решение задачи Дарбу с такими же начальными данными, как в п. А), но для другой системы $x_{nv} = A_n(x, y) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, y_{nv} = B_n(x, y) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, коэффициенты которой A_n и B_n непрерывны в круге R , и пусть $\frac{\partial(x_n, y_n)}{\partial(u, v)} > 0, n = 1, 2, \dots$

Тогда $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ равномерно в некотором квадрате $Q_b, 0 < b < a$, при $n \rightarrow \infty$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_R (|A_n - A| + |B_n - B|) dx dy = 0$. Отсюда и из (3)

и (5) следует, что характеристические сети отображений, аппроксимирующих F по условию леммы 1, равномерно сходятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к проекции на плоскость xu координатной сети uv , построенной на S согласно п. Б).

Д) Аппликата z текущей точки поверхности S имеет в координатах uv (построенных в п. Б)) смешанную производную z_{uv} , причем

$$z_{uv} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\mu} + Ap + Bq \right) \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}. \quad (6)$$

Величины φ, ψ в формуле (6) определяются согласно п. В), коэффициенты A, B даются формулами (5).

Е) Радиус-вектор $M = \{x, y, z\}$ текущей точки на S удовлетворяет уравнению $M_{uv} = [M_u \times M_v]$, для которого решение задачи Дарбу имеет такую же регулярность, как начальные данные этой задачи.

Из п. Е) и условий леммы 1 сразу следует, что $S \in C^2$ в некоторой области Q_a вида $|u| < a, |v| < a$. Отсюда и из результатов работы (3) следует, что $S \in C^3$ в некотором асимптотическом четырехугольнике $\bar{D}$.

$\bar{D} \subset Q_\alpha$. Размеры $\bar{D}$ оцениваются снизу (с учетом пунктов А) и Г)), чем и завершается доказательство леммы 1.

8°. Пусть S — гладкая локально гиперболическая поверхность, заданная уравнением вида $z = f(x, y)$ в единичном круге V_0 ($x^2 + y^2 < 1$), касающаяся плоскости $z = 0$ в центре этого круга. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое множество точек поверхности S , удовлетворяющее условиям пункта 3°. Пусть, кроме того, в области $V_0 \setminus \mathcal{M}'$ функция $f(x, y)$ имеет регулярность C^3 и соблюдаются оценки вида $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \leq -m_1$; $|f_{xx}|, |f_{xy}|, |f_{yy}| \leq m_2$; $|f_{xxx}|, |f_{xxy}|, |f_{xyy}|, |f_{yyy}| \leq m_3\rho^{-1}$. Здесь m_1, m_2, m_3 — положительные постоянные, ρ — расстояния до множества $\mathcal{M}'$. Тогда справедлива

Лемма 2. *Существует $m = m(c, m_1, m_2) > 0$ такое, что при $m_3 \leq m$ найдется круг $V_1 \subset V_0$, в котором нормальное отображение F поверхности S можно сколь угодно точно равномерно аппроксимировать гомеоморфным отображением $\tilde{F}$ вида (1) класса C^2 с отрицательным якобианом и с соблюдением неравенства вида (3). При этом можно обеспечить равенство $\tilde{F} = F$ вне сколь угодно малой окрестности множества $\mathcal{M}'$.*

Доказательство. Пусть U_i — один из геодезических кругов покрытия множества $\mathcal{M}$, описанного в пункте 3°, $\bar{U}_i$ — геодезический круг, получающийся из U_i увеличением радиуса в $(1 + \theta c)$ раз, $0 < \theta < 1$. В области $\bar{U}_i'$ строится вспомогательное отображение F_i класса C^2 , которое затем «склеивается» с отображением F внутри кольцевой области $\bar{U}_i' \setminus U_i'$. Такое построение проводится для всех кругов U_i . В результате получается искомое отображение $\tilde{F}$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
17 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Л. Вернер, Матем. сборн., 74 (116), № 2 (1967); 75 (117), № 1 (1968).
² Н. В. Ефимов, там же, 64 (106), № 2 (1966). ³ С. Э. Кон-Фоссен, Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959. ⁴ А. В. Погородов, Поверхности ограниченной внешней кривизны, Харьков, 1956. ⁵ Э. Р. Розендорн, Матем. сборн., 73 (115), № 2 (1967).