Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 3

УДК 531.381 *МЕХАНИКА*

Ф. Х. ЦЕЛЬМАН

РЕЗОНАНСЫ И НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 20 VII 1972)

Поставленный Пуанкаре ([1]) (после работ С. Ковалевской и Брунса) вопрос об условиях существования в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки «четвертого» алгебраического интеграла (помимо интеграла энергии, интеграла моментов и «тривиального» геометрического) имеет длинную историю (см. обзоры в ([2], [3])). Пуанкаре, по-видимому, впервые указал на связь вопроса о наличии дополнительных (к энергии) интегралов в гамильтоновой системе с вырождениями «резонансного» характера ([1]). Он также дал некоторое применение своей знаменитой теоремы о несуществовании однозначных аналитических интегралов (отличных от энергии) в общих гамильтоновых системах к задаче о движении твердого тела ([1]). При этом Пуанкаре использовал метод малого параметра, изучая «окрестность» случая Эйлера — Пуансо.

Имеется довольно много работ, в которых получены частные интегралы, т. е. интегралы движения, когда ограничения накладываются не только на распределение масс, как это имеет место в классических * случаях интегрируемости, но и на начальные условия (см. ([3])).

Ниже будет показано, как из простейших резонансных соотношений вытекают некоторые условия, характеризующие ряд известных случаев, когда существует четвертый алгебраический интеграл (случай Лагранжа — Пуассона, сферической кинетической симметрии, Гесса — Аппельрота, Горячева — Чаплыгина).

При этом мы будем использовать следующее простое соображение. Изучим сначала малые движения (малые колебания) твердого тела около положения равновесия (подвешенное состояние). Естественно ожидать, что если интегралы существуют для достаточно широкой области начальных значений, то они существуют и для рассматриваемых малых движений **. Для малых же колебаний понятие резонанса возникает естественным образом и играет фундаментальную роль в вопросе о существовании дополнительных интегралов (см. ([4])). Изучая малые движения, можно надеяться получить первые члены разложения интегралов полной (нелинейной) задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки ***.

1. Пусть p, q, r — проекции вектора мгновенной угловой скорости вращения на подвижные оси Ox, Oy, Oz, неизменно связанные с телом и на-

* Классические случаи Эйлера — Пуансо, Лагранжа — Пуассона (и сферической кинетической симметрии) и С. Ковалевской исчерпывают случаи, когда существует «четвертый» алгебраический интеграл при любых начальных условиях (см. ([2], [3])).

** За исключением, конечно, тех случаев, когда ограничения (дополнительные условия) таковы, что запрещают движение в окрестности рассматриваемого положения равновесия.

*** Для вопроса о линейных интегралах это показано нами в статье ([8]), где из этих соображений были получены условия существования и вид линейных интегралов в случаях Гесса — Аппельрота, Лагранжа — Пуассона (и сферической симметрии), Бобылева — Стеклова.

правленные по главным осям эллипсоида инерции, построенного относительно неподвижной точки O; A, B, C — главные моменты инерции относительно осей Ox, Oy, Oz; x_0, y_0, z_0 — координаты центра тяжести в подвижной системе координат: γ, γ', γ'' — направляющие косинусы вертикальной оси Oz_1, вдоль которой действует сила тяжести, причем единицы измерения выбраны так, что $Mg=1$, где M — масса тела, g — ускорение силы тяжести. Рассмотрим малые движения твердого тела в окрестности «подвешенного» положения равновесия для тех случаев, когда

$$y_0 = 0. \tag{1,1}$$

Тогда рассматриваемое состояние равновесия характеризуется условиями

$$\gamma_0' = 0, \quad z_0\gamma_0 = x_0\gamma_0'', \quad x_0\gamma_0 + z_0\gamma_0'' = l > 0, \tag{1,2}$$

где $l = \sqrt{x_0^2 + z_0^2}$ — расстояние от точки подвеса до центра тяжести *.

Линеаризованные уравнения малых колебаний, получаемые из уравнений Эйлера в предположении, что p, q, r малы, а направляющие косинусы γ, γ', γ'' мало отличаются от значений в положении равновесия, характеризуемых соотношениями (1, 2), могут быть записаны так **:

$$\begin{gathered} d^2p/dt^2 + (z_0\gamma_0''/A)\,p - (z_0\gamma_0/A)r = 0, \\ d^2r/dt^2 - (x_0\gamma_0''/C)p + (x_0\gamma_0/C)\,r = 0, \\ d^2q\,/\,dt^2 + ql\,/\,B = 0. \end{gathered} \tag{1,3}$$

Рассмотрение характеристического уравнения дает следующие выражения для его корней:

$$\omega_1^2 = \frac{Cz_0^2 + Ax_0^2}{ACl}, \quad \omega_2^2 = \frac{l}{B}, \quad \omega_3^2 = 0. \tag{1,4}$$

Система (1,3) линейной заменой

$$P = \frac{x_0p}{C} + \frac{z_0r}{A}, \quad R = -\frac{z_0p}{C} + \frac{x_0r}{C}, \quad q = q \tag{1,5}$$

может быть приведена к виду

$$\frac{d^2R}{dt^2} + \omega_1^2R = 0, \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \omega_2^2q = 0, \quad \frac{d^2P}{dt^2} = 0. \tag{1,6}$$

2. Резонанс 1 : 1. Построим, какие условия на параметры накладывает «простейшее» резонансное соотношение

$$\omega_1 = \omega_2. \tag{2,1}$$

Из (1,4) имеем

$$\frac{Cz_0^2 + Ax_0^2}{ACl} = \frac{l}{B}, \tag{2,1a}$$

что может быть переписано так:

$$C(A-B)z_0^2 + A(C-B)x_0^2 = 0. \tag{2,2}$$

Это условие на параметры твердого тела случая Гесса — Аппельрота, когда существует «дополнительный» частный интеграл (см. ([3])).

Соотношение (2,2) (и, следовательно, (2,1)) будет выполняться при дополнительном условии $x_0 = 0$ ($z_4 \neq 0$) лишь в случае $A = A$, т. е. в условиях случая Лагранжа — Пуассона.

При $A = B = C$ соотношение (2,1) выполняется (тождественно) (при любых x_0, z_0). Это есть интегрируемый случай полной кинетической симметрии.

* Мы здесь не рассматриваем очень вырожденный случай Эйлера — Пуансо ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$). Отметим, что из (1, 4) следует, что частоты ω_1, $\omega_2 \to 0$ при x_0, $z_0 \to 0$.

** Аналогичные уравнения для γ, γ', γ'' мы здесь не выписываем. Отметим, что традиционно ([2], [3]) вопрос о существовании «четвертого» алгебраического интеграла ставится в переменных p, q, r, γ, γ', γ''.

3. Резонанс 2 : 1. Предположим, что

$$\omega_1 = 2\omega_2. \tag{3,1}$$

С учетом (1,4) имеем

$$\frac{Cz_0^2 + Ax_0^2}{ACl} = 4\frac{l}{B}$$

или

$$C(B-4A)z_0^2 = A(4C-B)x_0^2. \tag{3,2}$$

При условии $A = B$ (3,2) переписывается как

$$3Cz_0^2 = (A-4C)x_0^2. \tag{3,3}$$

При $z_0 = 0$ $(x_0 \neq 0)$, имеем $4C = A$, т. е. приходим к соотношениям, характеризующим случай Горячева — Чаплыгина ([5], [6]).

Если предположить

$$2\omega_1 = \omega_2, \tag{3,1a}$$

то это даст следующие соотношения на параметры системы:

$$C(4B-A)z_0^2 = A(C-4B)x_0^2. \tag{3,4}$$

При условии $A = B$ имеем

$$3Cz_0^2 = x_0^2(C-4A).$$

Если $z_0 = 0$ $(x_0 \neq 0)$, то это дает

$$A = B = {}^1\!/_4 C. \tag{3,5}$$

Для «классического» твердого тела этот случай не может реализоваться, так как нарушается условие $A + B \geqslant C$. Но этот случай может реализоваться для твердого тела со специальной полостью, наполненной идеальной жидкостью («эквивалентного твердого тела») ([7]).

Замечание 1. Резонансные соотношения указывают лишь на возможность возникновения дополнительных интегралов (помимо энергии) для малых движений. Будут ли эти интегралы существовать, когда учитываются нелинейные члены в уравнении движения, и какие условия надо наложить на переменные (начальные условия), чтобы интегралы для малых движений оставались интегралами нелинейных уравнений Эйлера, должно исследоваться в каждом случае дополнительно.

Так, резонансы более высокого порядка (скажем $\omega_1 = 3\omega_2$, реализующийся, например, в случае $A = B = 9C$, $z_0 = y_0 = 0$) в принципе способны «порождать» дополнительные интегралы (обнаруживаемые при изучении малых колебаний), однако для того, чтобы они стали интегралами полных уравнений движения, необходимо накладывать большое число ограничений на переменные.

Замечание 2. Характер «вырождения» в случае С. Ковалевской и вопросы об интегралах движения в других силовых полях будут рассмотрены в следующих работах.

Автор неоднократно обсуждал рассматриваемые вопросы с В. В. Румянцевым, Л. М. Мархашовым и Л. Г. Хазиным, которым выражает свою глубокую благодарность.

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
29 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Пуанкаре, Новые методы небесной механики. Избр. тр., 1, «Наука», 1971. [2] П. Я. Полубаринова-Кочина, Сборн. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки, Изд. АН СССР, 1940. [3] В. В. Голубев, Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, Л.— М., 1953. [4] J. Moser, Lectures on Hamiltonian Systems, Memoires of the Am. Math. Soc., 81, 1968. [5] Д. Н. Горячев, Матем. сборн., 21, в. 3 (1900). [6] С. А. Чаплыгин, Тр. Отд. физ. наук Общ. любителей естествознания, 12, в. 1 (1904); Сборн. соч., 1, 1948. [7] Н. Е. Жуковский, О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., 2, М.—Л., 1949. [8] Ф. Х. Цельман, ПММ, № 1 (1973).