Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 2

УДК 513.88:513.83 *МАТЕМАТИКА*

Е. В. ОШМАН

ХАРАКТЕРИСТИКА ПОДПРОСТРАНСТВ С НЕПРЕРЫВНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИЕЙ В ЛИНЕЙНОМ НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 27 III 1972)

Пусть E и F — метрические пространства, $K(F)$ — множество всех замкнутых подмножеств пространства F. Отображение φ: $E \to K(F)$ называется многозначным отображением E в F; φ называется полунепрерывным сверху ([5]), если множество $\{x \in E: \varphi(x) \subset G\}$ открыто в E для каждого открытого множества $G \subset F$. Это определение совпадает с обычным определением непрерывности, если φ однозначно. Нетрудно также показать, что если $\varphi(x) \neq \phi$ и компактно для любого $x \in E$, то φ полунепрерывно сверху тогда и только тогда, когда из условия $\{x_n\} \subset E$, $x \in E$, $x_n \to x$, $y_n \in \varphi(x_n)$ всегда следует, что последовательность $\{y_n\}$ имеет предельную точку $y \in \varphi(x)$.

Пусть M — множество в E. Многозначное отображение T_M, которое каждой точке $x \in E$ ставит в соответствие множество $T_M(x) = \{y \in M: \rho(x, y) = \rho(x, M)\}$, называется метрической проекцией E на M ([4]). M называется множеством существования ([1]), или проксиминальным множеством (proximinal) ([2]), если $T_M(x) \neq \phi$ для любого $x \in E$, и чебышевским ([1]), если $T_M(x)$ одноточечно для любого $x \in E$.

Пусть X — линейное нормированное пространство (л.н.п.), X^* — его сопряженное и L — замкнутое подпространство в X. Фактор-пространство X / L в этом случае также л.н.п. с нормой $\|\hat{x}\| = \inf \{\|x + y\|: y \in L\}$, $\hat{x} = x + L \in X / L$. Рассмотрим на X следующую преднорму, ассоциированную с подпространством L:

$$\|x\|_{L^\perp} = \sup \{|f(x)|: \|f\| \leqslant 1, f \in L^\perp\},$$

где $L^\perp = \{f \in X^*: f(y) = 0 \quad \forall y \in L\}$. С помощью теоремы Хана — Банаха нетрудно показать, что для любого $x \in X$

$$\|x\|_{L^\perp} = \max \{|f(x)|: \|f\| = 1, f \in L^\perp\} = \rho(x, L) = \|\hat{x}\|, \tag{1}$$

где $\hat{x} = x + L \in X / L$.

Теорема 1. *Пусть X — л.н.п. и L — замкнутое подпространство в X. Тогда для того чтобы метрическая проекция T_L была полунепрерывна сверху, необходимо, чтобы множество $T_L(x)$ было либо пусто, либо компактно для любого $x \in X$. В частности, если L проксиминально, то $T_L(x)$ должно быть компактным для любого $x \in X$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$, $T_L(x_0) \neq \phi$ и некомпактно. Тогда $T_L(x_0)$ является ограниченным замкнутым выпуклым множеством в л.н.п. L и, как нетрудно видеть, каждая точка $y \in T_L(x_0)$ содержится в некотором интервале с концами, принадлежащими границе множества $T_L(x_0)$ в L. Из этого замечания легко вытекает, что граница множества $T_L(x_0)$ в L также некомпактна и, значит, содержит последовательность $\{y_n\}$, из которой нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. Так как $\{y_n\}$ принадлежит границе множества $T_L(x_0)$ в L, то найдется последовательность $\{z_n\} \subset L$ с $\|y_n - z_n\| \to 0$, $z_n \notin T_L(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, которая, так же как $\{y_n\}$, не имеет предельной точки. Пользуясь замкнутостью множеств $\{z_n\}$, $T_L(x_0)$ в L и нормальностью л.н.п. L, найдем такое открытое в L множество G, что $T_L(x_0) \subset G$ и $z_n \notin G$, $n = 1, 2, \ldots$ Предположим теперь, что отображение T_L полунепрерывно сверху. Тогда множество $\{x\colon T_L(x) \subset G\}$ открыто, содержит x_0 и $x_n = x_0 + z_n - y_n \to x_0$. Поэтому $z_n \in T_L(x_n) \subset G$ при $n > N$, что невозможно. Теорема доказана.

Заметим, что проксиминальность подпространства L не является необходимой для полунепрерывности сверху метрической проекции T_L. Так, например, в любом нерефлексивном банаховом пространстве существует непроксиминальное замкнутое гиперподпространство, на которое, очевидно, метрическая проекция полунепрерывна сверху.

Теорема 2. *Пусть X — л.н.п., L — его проксиминальное подпространство и* $L^0 = \{x \in X\colon 0 \in T_L(x)\}$.

Тогда, для того чтобы метрическая проекция T_L была полунепрерывна сверху, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: $\forall \{x_n\}, \forall x \quad (\{x_n\} \subset L^0, x \in L^0, \|x_n - x\|_{L^\perp} \to 0) \Rightarrow \{x_n\}$ *имеет предельную точку.*

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится один результат И. Зингера ([6]), теорема (В).

Теорема. *Пусть X — л.н.п., L — его подпространство и $x \in X$.*

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $y_\varepsilon \in X$ такой, что $f(y_\varepsilon) = f(x)$ для всех $f \in L^\perp$ и $\|y_\varepsilon\| \leqslant \|x\|_{L^\perp} + \varepsilon$.

Приступим к доказательству теоремы 2.

Необходимость. Пусть $\{x_n\} \subset L^0$, $x_0 \in L^0$ и $\|x_n - x_0\|_{L^\perp} \to 0$. Тогда, в силу теоремы И. Зингера, существует последовательность $\{y_n\} \subset X$ такая, что

$$f(y_n) = f(x_n - x_0), \quad \|y_n\| \leqslant \|x_n - x_0\|_{L^\perp} + 1/n \tag{2}$$

для всех $f \in L^\perp$ и $n = 1, 2, \ldots$ Из (2) следует, что

$$y_n - x_n + x_0 \in T_L(x_0 + y_n), \quad y_n \to 0, \quad x_0 + y_n \to x_0. \tag{3}$$

По предположению, отображение T_L полунепрерывно сверху, поэтому, в силу теоремы 1, $T_L(x)$ компактно для любого $x \in X$. В этом случае из (3) и полунепрерывности сверху T_L вытекает, что последовательность $\{y_n - x_n + x_0\}$, а значит, и $\{x_n\}$ имеет предельную точку.

Достаточность. Пусть выполнено условие, фигурирующее в теореме 2, $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$, $y_n \in T_L(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, и $x_n \to x$. Не нарушая общности, можно считать, что $x \in L^0$. Тогда, очевидно, $z_n = x_n - y_n \in L^0$, $x \in L^0$ и, так как $\{y_n\} \in L$, имеем $\|z_n - x\|_{L^\perp} = \|x_n - x\|_{L^\perp} \leqslant \|x_n - x\| \to 0$. Следовательно, последовательность $\{z_n\}$, а значит, и $\{y_n\}$ имеет предельную точку. Нетрудно убедиться, что все предельные точки последовательности $\{y_n\}$ принадлежат множеству $T_L(x)$.

Таким образом, мы доказали утверждение: $\forall \{x_n\}, \forall x, \forall \{y_n\}$ $(\{x_n\} \subset X, x \in X, x_n \to x, y_n \in T_L(x_n)) \Rightarrow \{y_n\}$ *имеет предельную точку* $y \in T_L(x)$; это утверждение, очевидно, влечет полунепрерывность сверху отображения T_L. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. В силу равенства (1) имеем

$$(\{x_n\} \subset L^0, x \in L^0) \sim (\|x_n\|_{L^\perp} = \|x_n\|, \|x\|_{L^\perp} = \|x\|),$$

$$(\|x_n - x\|_{L^\perp} \to 0) \sim (\rho(x_n - x, L) \to 0) \sim (\|\hat{x}_n - \hat{x}\| \to 0),$$

где $\hat{x}_n = x_n + L \in X / L$, $\hat{x} = x + L \in X / L$.

Замечание 2. Условие, фигурирующее в теореме 2, равносильно следующему: $\forall \{x_n\}, \quad \forall x \quad (\{x_n\} \subset X, \quad x \in X, \quad \|x_n\|_{L^\perp} = \|x_n\| = \|x\|_{L^\perp} = \|x\| = 1, x_n + L \to x + L) \Rightarrow \{x_n\}$ имеет предельную точку.

Из теоремы 2 непосредственно вытекает

Теорема 3. *Пусть X — л.н.п. и L — чебышевское подпространство в X.*

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

а) *метрическая проекция T_L непрерывна*;

б) $\forall\{x_n\}, \forall x \quad (\{x_n\}\subset L^0, x\in L^0, \|x_n-x\|_{L^\perp}\to 0)\Rightarrow x_n\to x$;

в) $\forall\{x_n\}, \forall x \quad (\{x_n\}\subset X, x\in X, \|x_n\|_{L^\perp}=\|x_n\|=\|x\|_{L^\perp}=\|x\|=1, x_n+L\to x+L)\Rightarrow x_n\to x$;

г) *на множестве L^0 топология, индуцируемая преднормой $\|x\|_{L^\perp}$, и топология, индуцируемая нормой л.н.п. X, совпадают.*

Если подпространство L имеет конечную фактор-размерность, то из теорем 2 и 3 легко вытекает более простая

Теорема 4. *Пусть X — л.н.п. и L — его проксиминальное (соответственно чебышевское) подпространство конечной фактор-размерности.*

Тогда, для того чтобы метрическая проекция T_L была полунепрерывна сверху (соответственно непрерывна), необходимо и достаточно, чтобы множество L^0 было ограниченно компактно *.

Для чебышевского подпространства эта теорема была получена другим методом Чини и Вулбертом ([7]), предложение 10, а для проксиминального подпространства, в преположении компактности $T_L(x)$, для любого $x\in X$ — Моррисом ([8]), теорема 2.

Замечание 3. Пусть L — проксиминальное подпространство в л.н.п. X, у которого множество L^0 ограниченно компактно. Тогда L имеет конечную фактор-размерность.

Замечание 4. В теоремах 2, 3, 4 мы предполагали подпространство L проксиминальным или чебышевским. Полная характеристика таких подпространств в произвольном л.н.п. дана И. Зингером ([6]). А. Л. Гаркави ([3]) получил такую характеристику (в более эффективной форме) для класса фактор-рефлексивных подпространств, который, в частности, содержит все подпространства конечной фактор-размерности.

Замечание 5. Все результаты, опубликованные нами в ([9]), легко могут быть получены с помощью теорем 1 — 4 и методов, примененных при их доказательствах.

Пример. Рассмотрим в пространстве l_2 вещественных числовых последовательностей $x=\{\xi_i\}$, суммируемых с квадратом, следующую норму, эквивалентную исходной:

$$\|x\|_{S'}=\inf\{|\lambda|: x\in\lambda S'\},\quad S'=[\bigcap_{n=3}^{\infty}W_n]\cap S_0,$$

$$W_n=S_n\cap(-S_n),\qquad S_0=\left\{x=\{\xi_i\}\in l_2:\ \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\xi_i^2}{i^2}\leqslant 1\right\},$$

$$S_n=\{x\in l_2:\ \|x-y_n\|\leqslant R_n\},$$

$$y_n=\Big(\underbrace{[1-R_n]\sqrt{1-1/n^2},\ [1-R_n]\frac{1}{n},\ 0,\ldots,0,\frac{3}{4}}_{n},\ 0,\ldots\Big),$$

$$R_n=1+\sup_{\substack{m\neq n\\ 3\leqslant m<\infty}}\left\{\frac{1}{1-1/(nm)-\sqrt{(1-1/m^2)(1-1/n^2)}}\right\}.$$

Пусть X — пространство l_2 с нормой $\|x\|_{S'}$ и $L=\{x=\{\xi_i\}\in l_2;\ \xi_i=0,\ i=1,2\}$. Тогда X рефлексивно, строго выпукло и L — чебышевское подпространство фактор-размерности 2 в X. Положим для $n\geqslant 3$

$$x_n=\Big(\underbrace{\sqrt{1-1/n^2},\ \frac{1}{n},\ 0,\ldots,0,\ \frac{3}{4}}_{n},\ 0,\ldots\Big).$$

* Множество в л.н.п. X называется ограниченно компактным, если его пересечение с любым замкнутым шаром компактно в себе.

Нетрудно убедиться, что последовательность $\{x_n\} \subset L^0$ ограничена и некомпактна. Значит, в силу теоремы 4, метрическая проекция T_L разрывна.

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького
Свердловск

Поступило
27 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, ДАН, **118**, № 1, 17 (1958). [2] Л. П. Власов, Матем. заметки, **7**, № 5, 593 (1970). [3] А. Л. Гаркави, Матем. сборн., **62**, № 1, 104 (1963). [4] V. L. Klee, Math. Ann., **142**, № 3, 292 (1961). [5] E. A. Michael, Trans. Am. Math. Soc., **71**, 152 (1951). [6] I. Singer, Rev. Roumaine de Math. pure et appl., **6**, № 2, 357 (1961). [7] E. W. Cheney, D. E. Wulbert, Math. Scand., **24**, 113 (1969). [8] P. D. Morris, Duke Math. J., **35**, № 4, 799 (1968). [9] Е. В. Ошман, ДАН, **195**, № 3, 555 (1970).