

УДК 513.831

МАТЕМАТИКА

А. В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ

СПЕКТР ЧАСТОТ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА И КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 18 II 1972)

I. Терминология. Предварительные обозначения. Рассматриваемые ниже пространства мы заранее предполагаем вполне регулярными, хотя многие результаты легко переносятся на регулярные или даже хаусдорфовы пространства. Символы X, Y, X_α обозначают топологические пространства, $[\]$ — оператор замыкания, βX — стоун-чеховское расширение пространства X . Через bX, b_1X, b_2X (bY) обозначаются произвольные бикомпактные хаусдорфовы расширения пространства X (соответственно Y). Везде далее N^+ — множество всех положительных целых чисел. Символами $\tau, \lambda, \tau', \tau_1$ обозначаются бесконечные кардинальные числа. Если $A \subset X$, то $[A]_\tau = \bigcup \{[B]: B \subset A \text{ и } |B| \leq \tau\}$ (где $|B|$ — мощность B). Если $A \subset X, B \subset X$, то $t^*(A, B) = \min \{|C|: C \subset B, [C] \cap A \neq \emptyset\}$, когда $A \cap [B] \neq \emptyset$, и $t^*(A, B) = 0$, когда $A \cap [B] = \emptyset$.

Далее, $\text{pt}(A, B) = \sup \{t^*(A, B'): B' \subset B\}$. Если $x \in X$, то $t(x, A) = \text{pt}(\{x\}, A)$. Далее, $t(A, B) = \sup \{t(x, B): x \in A\}$, $t(X) = t(X, X)$ и $\text{cot}(X) = \text{pt}(X, \beta X)$, причем $t(X)$ называется теснотой, а $\text{cot}(X)$ — котеснотой пространства X . Разъяснение ряда других терминов и обозначений дается в ⁽³⁾ и ⁽⁶⁾.

II. Некоторые фундаментальные утверждения. Для всех $x \in X$ $t(x, b_1X) = t(x, b_2X)$ и потому $t(X, b_1X) = t(X, b_2X)$. Если $r_i(X) = [X]_\tau$, где $[\]$ берется в b_iX , $i = 1, 2$, то $t(x, r_1(X)) = t(x, r_2(X))$ для всех $x \in X$. Поэтому корректно определение: $\text{at}(X) = t(X, bX)$ ($\text{at}(X)$ называется абсолютной теснотой X). Далее, $\text{pt}(X, b_1X) = \text{pt}(X, b_2X)$ и потому $\text{cot}(X) = \text{pt}(X, bX)$. Всегда $t(X) \cdot \text{cot}(X) = \text{at}(X)$. Если $\tilde{X} \supset X$, $[\tilde{X}]_\tau = \tilde{X}$ и для каждого $A \subset X$ из $|A| \leq \tau$ следует, что $[A]$ — бикомпакт ($[\]$ берется в $\tilde{X}$), то $\tilde{X}$ называется τ -расширением пространства X .

Определение 1. Кардинал $\tau \geq \aleph_0$ называется частотой пространства X в точке $x \in X$, если $t(x, [X]_\tau) \leq \tau$, где оператор $[\]$ берется в каком-нибудь bX (безразлично в каком, см. выше).

Определение 2. а) $\text{Sp}(x, X) = \{\tau: \tau \text{ — частота } X \text{ в } x\}$; б) $\text{Sp}(X) = \bigcap \{\text{Sp}(x, X): x \in X\}$. Класс $\text{Sp}(x, X)$ называется спектром частот пространства X в точке x , а класс $\text{Sp}(X)$ называется спектром частот пространства X .

Скажем, что семейство $\mathcal{E}$ семейств подмножеств пространства X τ -отделено от $x \in X$, если коль скоро $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ и $|\mathcal{P}| \leq \tau$, то можно выбрать $A(\xi) \in \xi$ для каждого $\xi \in \mathcal{P}$ так, чтобы $x \notin [\bigcup \{A(\xi): \xi \in \mathcal{P}\}]$.

Определение 3. Пространство X τ -сингулярно в точке $x \in X$, если существует семейство $\mathcal{P}_x$ центрированных семейств подмножеств множества X со следующими свойствами: а) для каждого $\xi \in \mathcal{P}_x$ существует $A \in \xi$ такое, что $|A| \leq \tau$; б) для каждой окрестности O_x точки x существуют $\xi \in \mathcal{P}$ и $A \in \xi$, для которых $A \subset O_x$; в) $\mathcal{P}_x$ τ -отделено от x . Семейство $\mathcal{P}_x$ с перечисленными свойствами называется τ -сингулярным в x .

Теорема 1. Следующие утверждения равносильны: 1) $\tau \notin \text{Sp}(X)$; 2) существует Y , для которого $t(Y) \leq \tau$, но $t(X \times Y) > \tau$; 3) существует

точка $x \in X$, в которой X τ -сингулярно; 4) каково бы ни было τ -расширение rX пространства X , $t(X, rX) > \tau$; 5) существует τ -расширение rX пространства X , для которого $t(X, rX) > \tau$.

Через K_1 будем далее обозначать результат отождествления пределов в свободной сумме $\aleph_0$ экземпляров сходящейся последовательности (топология — фактор-пространства). Пространство K_1 — пространство Фреше — Урысона, $|K_1| = \aleph_0$, в K_1 лишь одна неизолированная точка, но при всем том $\aleph_0 \notin \text{Sp}(K_1)$, т. е. $\text{at}(K_1) = t(K_1, \beta K_1) > \aleph_0$ — произведение K_1 на результат отождествления пределов в свободной сумме $2^{\aleph_0}$ экземпляров сходящейся последовательности имеет несчетную тесноту. Пусть N — натуральный ряд с дискретной топологией и $N^* = \beta N \setminus N$. Как выяснил В. Малыхин ⁽⁸⁾, $t(x^*, N^*) > \aleph_0$ для каждой точки $x^* \in N^*$. Отсюда и из теоремы 1 следует, что если $X = N \cup \{x^*\}$, где $x^* \in N^*$, то $\aleph_0 \notin \text{Sp}(X)$ ($t(x^*, \beta X) > \aleph_0$, здесь $\beta X = \beta N$). Из сказанного следует, что даже задача классификации счетных пространств с единственной неизолированной точкой является весьма тонкой.

III. Общие утверждения о спектре частот. Спектр частот, в отличие от тесноты, идеально ведет себя при перемножении.

Теорема 2. Пусть $X = \Pi\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ и $|X_\alpha| \geq 2$ для каждого $\alpha \in A$.

Тогда

$$\text{Sp}(X) = \{\tau \in \bigcap \{\text{Sp}(X_\alpha): \alpha \in A\}; \tau \geq |A|\}.$$

Следствие 1. Спектр частот произведения счетного множества пространств равен пересечению спектров частот сомножителей.

Следствие 2 ⁽⁷⁾. Теснота произведения счетного семейства бикомпактов равна верхней грани теснот сомножителей (или $\aleph_0$).

Лемма 1. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — бифакторное отображение, $f(X) = Y$ и $\tilde{f}: bX \rightarrow bY$ — непрерывное отображение, продолжающее f . Тогда

1) если $B \subset bY$, $y \in Y$ и $[B] \ni y$, то $[\tilde{f}^{-1}B] \cap f^{-1}y \neq \Lambda$;

2) если $B \subset bY$ и $[B] \cap Y \neq \Lambda$, то $[\tilde{f}^{-1}B] \cap X \neq \Lambda$.

Теорема 3. Если $f: X \rightarrow Y$ — бифакторное отображение и $f(X) = Y$, то 1) $\text{Sp}(X) \subset \text{Sp}(Y)$; 2) $\text{at}(Y) \leq \text{at}(X)$; 3) $\text{cot}(Y) \leq \text{cot}(X)$.

Теорема 4. Если $f: X \rightarrow Y$ — совершенное отображение и $f(X) = Y$, то $\text{cot}(X) = \text{cot}(Y)$.

Теорема 5. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — совершенное отображение и $f(X) = Y$. Тогда $\text{Sp}(X) = \{\tau \in \text{Sp}(Y): \tau \geq \sup \{t(f^{-1}y): y \in Y\}\}$.

Теорема 6. Если $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное замкнутое отображение, то $t(X) \leq \sup \{t(Y), t(f^{-1}y): y \in Y\}$.

Теорему 6 можно рассматривать как обобщение следующего результата В. Малыхина: если X — бикомпакт и $t(X) \leq \tau$, $t(Y) \leq \tau$, то $t(X \times Y) \leq \tau$.

IV. Классификация пространств. Эта классификация касается пространств Фреше — Урысона (именуемых далее FU-пространствами); она не тривиальна для пространств без первой аксиомы счетности. Мы полагаем $\langle \text{FU} \rangle = \{X: X \text{ есть FU-пространство}\}$.

Определение 4. Пусть $X \subset Y$. Скажем, что пространство X — пространство Фреше — Урысона в Y , если, коль скоро $x \in X$, $M \subset \subset Y$ и $x \in [M]$, существует последовательность $\{x_n: n \in \mathbb{N}^+\}$ точек множества M , сходящаяся к x .

Определение 5. Пространство X — абсолютно пространство Фреше — Урысона (AFU-пространство, $X \in \langle \text{AFU} \rangle$), если X является пространством Фреше — Урысона в bX .

Важные классы пространств Фреше — Урысона были выделены Э. Майклом и Ф. Сивецом (см. ^(5, 6)): класс бисеквенциальных (bisequential) пространств и класс пространств сильных Фреше (countably-bisequential, strongly Frechet). Мы обозначаем последний через $\langle \text{SFU} \rangle$.

Теорема 7. Пусть X бисеквенциально. Тогда, если $Y \in \langle AFU \rangle$, то и $X \times Y \in \langle AFU \rangle$.

Группа следствий. 1) $\langle AFU \rangle \subset \langle SFU \rangle$; 2) если X бисеквенциально, то $X \in \langle AFU \rangle$, $at(X) \leq \aleph_0$ и $Sp(X) = \{\tau: \tau \geq \aleph_0\}$; 3) если X счетно компактно и $X \in \langle FU \rangle$, то $X \in \langle SFU \rangle$; (это ответ на вопрос Э. Майкла (⁵, ⁶); независимо от меня он получен также R. Olson, как мне сообщил недавно Э. Майкл); 4) если X бисеквенциально и $t(Y) \leq \tau$, то и $t(X \times Y) \leq \tau$.

Теорема 8. Σ -произведение (см. (⁴)) любого множества бисеквенциальных хаусдорфовых пространств является SFU -пространством ($\in \langle SFU \rangle$).

Пример. Пусть S — Σ -произведение $\aleph_1$ экземпляров дискретного двоеточия $D = \{0, 1\}$ с центром в точке $x_0 = \{0, 0, 0, \dots, 0, \dots\}$; M — Σ -произведение тех же пространств с центром в точке $x_1 = \{1, 1, 1, \dots, 1, \dots\}$, и $bS = D^{\aleph_1}$ — полное произведение. Тогда bS — бикompактное хаусдорфово расширение пространства S , $M \subset bS \setminus S$, $x_0 \in [M]$ и $[M]_{\aleph_0} = M$, $[S]_{\aleph_0} = S \ni x_0$. Следовательно, $x_0 \notin [M]_{\aleph_0}$ и $at(S) > \aleph_0$. Итак, $S \in \langle SFU \rangle$, но $S \notin \langle AFU \rangle$ и S не бисеквенциально (это ответ на вопрос Э. Майкла, см. (⁵, ⁶)). Пространство S секвенциально компактно и $|S| = \aleph_1$. Если $Y \in \langle SFU \rangle$, то $S \times Y \in \langle SFU \rangle$. Далее, $\aleph_0 \in Sp(S)$ и потому, если $t(X) \leq \aleph_0$, то и $t(S \times X) \leq \aleph_0$. Если $2^{\aleph_1} > 2^{\aleph_0}$, то существует $X \in \langle SFU \rangle$, для которого $|X| = \aleph_0$, $at(X) > \aleph_0$, $\aleph_0 \notin Sp(X)$ и X не бисеквенциально (В. Малыхин — А. А. Архангельский и Дж. Исбелл (J. Isbell)).

Пусть $X \in \langle SFU \rangle$ и $Y \in \langle SFU \rangle$. Не известно, непременно ли тогда $X \times Y \in \langle SFU \rangle$ (вопрос Э. Майкла). В связи с этим предлагается рассмотреть следующие ограничения на пространство Фреше — Урысона X .

Определение 6. Пространство X называется $\aleph_0$ -бисеквенциальным, если каждое счетное $A \subset X$ бисеквенциально и $\aleph_0 \in Sp(X)$.

Предложение 1. Если X $\aleph_0$ -бисеквенциально, то $X \in \langle SFU \rangle$.

Теорема 9. Произведение счетного множества $\aleph_0$ -бисеквенциальных пространств является $\aleph_0$ -бисеквенциальным пространством.

Предложение 2. Если $X \in \langle SFU \rangle$ и Y $\aleph_0$ -бисеквенциально, то $X \times Y \in \langle SFU \rangle$.

Теорема 10. Сепарабельное $\aleph_0$ -бисеквенциальное пространство бисеквенциально.

Рассмотрим следующие четыре свойства пространства X . Если $x \in X$ и γ — счетное семейство последовательностей в X , сходящихся к x , то существует сходящаяся к x последовательность q^* такая, что:

- (α_1) если $q \in \gamma$, то q^* содержит все члены q , начиная с некоторого;
- (α_2) если $q \in \gamma$, то q^* и q имеют общую подпоследовательность;
- (α_3) $|\{q \in \gamma: q \text{ и } q^* \text{ имеют общую последовательность}\}| = |\gamma|$;
- (α_4) $|\{q \in \gamma: q \text{ и } q^* \text{ есть общий член}\}| = |\gamma|$.

Мы полагаем $\langle \alpha_i = FU \rangle = \{X \in \langle FU \rangle: X \text{ обладает свойством } \alpha_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Очевидно, $\langle \alpha_1 = FU \rangle \subset \langle \alpha_2 = FU \rangle \subset \langle \alpha_3 = FU \rangle \subset \langle \alpha_4 = FU \rangle$. Конечно, если X с первой аксиомой счетности, то $X \in \langle \alpha_1 = FU \rangle$.

Предложение 3. $\langle \alpha_4 = FU \rangle = \langle SFU \rangle$.

Теорема 11. Если X $\aleph_0$ -бисеквенциально, то $X \in \langle \alpha_3 = FU \rangle$.

Предложение 4. Если $X \in \langle \alpha_3 = FU \rangle$ и Y — счетно компактное пространство Фреше — Урысона, то $X \times Y \in \langle FU \rangle$.

Существует, в предположении, что $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, $X \in \langle \alpha_1 = FU \rangle$, для которого $X \notin \langle AFU \rangle$, $|X| = \aleph_0$. Заметим, что если для каждого счетного $A \subset X$ $[A] \in \langle \alpha_i = FU \rangle$, то $X \in \langle \alpha_i = FU \rangle$, $i = 1, 2, 3, 4$. В частности, если замыкание в X каждого счетного $A \subset X$ является пространством с первой аксиомой счетности, то $X \in \langle \alpha_1 = FU \rangle$. Следовательно, если X — Σ -произведение пространств с первой аксиомой счетности, то $X \in \langle \alpha_1 = FU \rangle$. Значит, $S \in \langle \alpha_1 = FU \rangle$ (см. пример).

Недавно (⁵, ⁶) были введены, несомненно полезные, понятия би- k -пространства (bi- k -space), счетно-би- k -пространства (countably bi- k -space) и 1-би- k -пространства (singly bi- k -space).

Предложение 5. Пусть X — 1-би- k -пространство и каждый бикомпакт $F \subset X$ принадлежит $\langle FU \rangle$. Тогда и $X \in \langle FU \rangle$.

Предложение 6. Если X — счетно-би- k -пространство и Y бисеквенциально, то $X \times Y$ — счетно-би- k -пространство.

Теорема 12. Если каждый бикомпакт $F \subset X$, где X — счетно-би- k -пространство, принадлежит $\langle FU \rangle$, то $X \in \langle SFU \rangle$.

Этот результат я получил, уже зная из письма формулировку следующего результата R. Olson: если X — счетно-би- k -пространство и $X \in \langle FU \rangle$, то $X \in \langle SFU \rangle$.

Ответ на вопрос F. Siwiec (⁶) заключает

Теорема 13. $X \in \langle SFU \rangle$ в том и только том случае, если каждое $Y \subset X$ является счетно-би- k -пространством (см. (²)).

Теорема 14. Пусть X — би- k -пространство, каждое бикомпактное подпространство которого удовлетворяет (в себе) первой аксиоме счетности.

Тогда X бисеквенциально.

Следствие 1. Каждое счетное би- k -пространство бисеквенциально (см. также (³)).

Теорема 15. Если X — би- k -пространство, то а) $\cot(X) \leq \aleph_0$, и б) $\text{Sp}(X) = \{\tau: \tau \geq t(X)\}$.

Следствие. Если X — пространство точек счетного типа и $t(X) \leq \aleph_0$, то $\text{Sp}(X) = \{\tau: \tau \geq \aleph_0\}$.

Теорема 16. Если каждое подпространство пространства X является би- k -пространством, то X $\aleph_0$ -бисеквенциально.

Нерешенные вопросы: 1) Верно ли, что если $X \in \langle AFU \rangle$, то $X \in \langle \alpha_3 = FU \rangle$? 2) Пусть X — бикомпакт и $X \in \langle FU \rangle$. Верно ли, что тогда $X \in \langle \alpha_3 = FU \rangle$? 3) Пусть $X \in \langle AFU \rangle$ и $Y \in \langle AFU \rangle$. Непременно ли тогда $X \times Y \in \langle FU \rangle$? 4) Каждый ли бикомпакт Фреше — Урысона $\aleph_0$ -бисеквенциален? 5) Существует ли счетное $X \in \langle AFU \rangle$, которое не бисеквенциально? 6) Существует ли $X \in \langle AFU \rangle$, которое не $\aleph_0$ -бисеквенциально? 7) Существует ли $X \in \langle AFU \rangle$, которое не бисеквенциально? 7) Пусть X и Y — бикомпакты Фреше — Урысона. Верно ли, что тогда $X \times Y$ — бикомпакт Фреше — Урысона? 8) Верно ли, что квадрат бикомпакта Фреше — Урысона является бикомпактом Фреше — Урысона? Последние два вопроса принадлежат Э. Майклу.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. В. Архангельский, Тр. Моск. матем. общ., **13** (1965). ² A. V. Arhangel'skii, Czech. Math. J., **18**, 392 (1968). ³ А. В. Архангельский, ДАН, **199**, № 6 (1974). ⁴ H. H. Corson, Amer. J. of Math., **81**, 785 (1959). ⁵ E. Michael, Pittsburgh. Intern. Top. Conf., 1970. ⁶ F. Sivec, General Topology and its Appl., **1**, № 2, 143 (1971). ⁷ В. И. Малыхин, ДАН, **203**, № 5 (1972). ⁸ В. И. Малыхин, ДАН, **203**, № 5 (1972).