

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

В. М. ШУРЕНКОВ

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ
С ИММИГРАЦИЕЙ, УПРАВЛЯЕМОЙ КОНЕЧНОЙ ЦЕПЬЮ МАРКОВА**

(Представлено академиком В. М. Глушковым 30 III 1972)

Пусть $(\zeta(t), t \geq 0)$ — однородная цепь Маркова с конечным числом состояний $\{1, 2, \dots, m\}$ и матрицей переходных вероятностей

$$P(t) = \|p_{ij}(t)\|_{i,j=1,\dots,m},$$

$$p_{ij}(t) = P\{\zeta(s+t) = j | \zeta(s) = i\}.$$

Обозначим

$$Q = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [P(t) - E] = \|q_{ij}\|_{i,j=1,\dots,m},$$

E — единичная матрица.

Рассмотрим стохастически непрерывный двумерный марковский процесс $(\zeta(t), \xi(t))$, где $\xi(t) \geq 0$. Будем говорить, что $(\zeta(t), \xi(t))$ — ветвящийся процесс с иммиграцией, управляемой цепью Маркова $\zeta(t)$, если

$$M[\zeta(t) = j, e^{-\lambda \xi(t)} | \zeta(0) = i, \xi(0) = x] = e^{-xK(t, \lambda)} \Phi_{ij}(t, \lambda),$$

где

$$K(t, \lambda) = a(t)\lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda z}) \Pi(t, dz), \quad (1)$$

$a(t) \geq 0$, мера $\Pi(t, dz)$ такова, что

$$\int_0^\infty \frac{z}{1+z} \Pi(t, dz) < \infty.$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$\Phi(t, \lambda) = \|\Phi_{ij}(t, \lambda)\|_{i,j=1,\dots,m}.$$

Из уравнения Колмогорова — Чепмена легко получить

$$K(t+s, \lambda) = K(t, K(s, \lambda)),$$

$$\Phi(t+s, \lambda) = \Phi(t, K(s, \lambda))\Phi(s, \lambda).$$

В ⁽¹⁾ доказано, что $K(t, \lambda)$ — дифференцируемая функция по t и удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} K(t, \lambda) = H(K(t, \lambda)), \quad K(0, \lambda) = \lambda, \quad (2)$$

где

$$H(\lambda) = a\lambda - b\lambda^2 + \int_0^\infty \left(1 - \frac{\lambda z}{1+z^2} - e^{-\lambda z}\right) \Pi(dz), \quad (3)$$

$b \geq 0$, мера Π такова, что

$$\int_0^\infty \frac{z^2}{1+z^2} \Pi(dz) < \infty.$$

Известно (см., например, (2)), что уравнение (2) имеет единственное решение, имеющее вид (1), тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ интеграл

$$\int_0^\varepsilon d\lambda/H(\lambda) \quad (4)$$

расходится. В дальнейшем будем предполагать условие (4) выполненным.

Теорема 1. Матрица $\Phi(t, \lambda)$ дифференцируема по t при $\lambda > 0$ и удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\partial\Phi(t, \lambda)/\partial t = \Psi(K(t, \lambda))\Phi(t, \lambda), \quad \Phi(0, \lambda) = E, \quad (5)$$

где

$$\Psi(\lambda) = \|\psi_{ij}(\lambda)\|_{i,j=1,\dots,m},$$

$$\psi_{ij}(\lambda) = q_{ij} \int_0^\infty e^{-\lambda z} S_{ij}(dz);$$

$$\int_0^\infty S_{ij}(dz) \leq 1, \quad i \neq j; \quad (6)$$

$$\psi_{ii}(\lambda) = q_{ii} - c_i - d_i\lambda - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda z}) S_i(dz),$$

$$c_i \geq 0, \quad d_i \geq 0;$$

мера S_i такова, что

$$\int_0^\infty \frac{z}{1+z} S_i(dz) < \infty.$$

Теорема 2. Для всякой однородной цепи Маркова $\xi(t)$, определяемой матрицей Q , функции $H(\lambda)$, имеющей вид (3), и матрицы $\Psi(\lambda)$, имеющей вид (6), существует единственный стохастически непрерывный ветвящийся процесс с иммиграцией, управляемой цепью Маркова $(\xi(t), \xi(t))$ такой, что выполняются соотношения (2), (5). Для выполнения равенства

$$P\{\xi(t) < \infty\} = 1$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Psi(\lambda) = Q.$$

Предположим, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Psi(\lambda) = Q,$$

$$G = -\Psi'(0) < \infty, \quad \mu = H'(0) < \infty.$$

Предположим также, что существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = P > 0.$$

Теорема 3. Если $\mu < 0$, то существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, \lambda) = \Phi(\lambda).$$

Матрица $\Phi(\lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Phi'(\lambda)H(\lambda) + \Phi(\lambda)\Psi(\lambda) = 0,$$

$$\Phi(0) = P.$$

Теорема 4. Если $\mu = 0$, $\sigma = -1/2 H''(0) < \infty$, то

$$M[e^{-\lambda \frac{\xi(t)}{t}} | \xi(0) = j] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} (1 + \sigma \lambda)^{-\frac{1}{\sigma} (p, Gu)},$$

где p — вектор-строка матрицы P , u — вектор, состоящий из одних единиц.

Теорема 5. Если $\mu > 0$, $H''(0) > -\infty$, $\Psi''(0) < \infty$, то при $t \rightarrow \infty$ и при условии $\xi(0) = i$ случайная величина $e^{-\mu t} \xi(t)$ сходится в среднем квадратическом. Существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, e^{-\mu t} \lambda) = \Phi(\lambda).$$

Матрица $\Phi(\lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Phi'(\lambda) = \frac{1}{\mu \lambda} \Psi(L(\lambda)) \Phi(\lambda),$$

$$\Phi(0) = P,$$

где $L(\lambda)$ — решение дифференциального уравнения

$$L'(\lambda) = \frac{1}{\mu \lambda} H(L(\lambda)),$$

$$L(0) = 0.$$

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
7 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. М. Рыжов, А. В. Скороход, Теория вероятн. и ее применения, **15**, № 4 (1970). ² К. Кавазу, С. Ватанабе, Теория вероятн. и ее применения, **16**, № 1 (1971).