Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 2

УДК 517.43 МАТЕМАТИКА

М. И. ГРАЕВ, Н. В. ПАВЛЕНКО

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbf{P}^n(A)$, ГДЕ A — КОНЕЧНОЕ КОММУТАТИВНОЕ КОЛЬЦО С ЕДИНИЦЕЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 17 II 1972)

1. Пространства $\mathbf{P}^n(A)$ и $\widetilde{\mathbf{P}}^n(A)$. Пусть A — произвольное конечное коммутативное кольцо с единицей, A^* — мультипликативная группа обратимых элементов кольца A.

Рассмотрим $(n+1)$-мерное векторное пространство A^{n+1} над A. Пусть $M^{n+1} \subset A^{n+1}$ — подмножество всех векторов $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ таких, что идеал, порожденный $x_1, \ldots, x_{n+1}$, равен A. Отождествим между собой векторы из M^{n+1}, различающиеся множителями $\lambda \in A^*$; полученное множество обозначим через $\mathbf{P}^n(A)$ и назовем n-мерным проектным пространством над A.

Аналогично, пусть $(A^{n+1})' = \mathrm{Hom}(A^{n+1}, A)$ — векторное пространство, сопряженное A^{n+1}, $\widetilde{M}^{n+1}$ — подмножество векторов $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{n+1})$ из $(A^{n+1})'$ таких, что идеал в A, порожденный $\xi^1, \ldots, \xi^{n+1}$, равен A. Отождествляя векторы из $\widetilde{M}^{n+1}$, различающиеся множителем $\lambda \in A^*$, получим множество, которое обозначим через $\widetilde{\mathbf{P}}^n(A)$.

Множество $\mathbf{P}^n(A)$ имеет следующую интерпретацию. Назовем элементы $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{n+1}) \in \widetilde{\mathbf{P}}^n(A)$ и $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \subset \mathbf{P}^n(A)$ инцидентными, если $\langle \xi, x \rangle = \xi^1 x_1 + \ldots + \xi^{n+1} x_{n+1} = 0$. Множество элементов $x \in \mathbf{P}^n(A)$, инцидентных $\xi \in \widetilde{\mathbf{P}}^n(A)$, назовем гиперплоскостью, отвечающей ξ. Нетрудно убедиться, что различным ξ отвечают различные гиперплоскости. Поэтому $\widetilde{\mathbf{P}}^n(A)$ можно интерпретировать как множество гиперплоскостей в $\mathbf{P}^n(A)$.

В пространствах $\widetilde{\mathbf{P}}^n(A)$ и $\widetilde{\mathbf{P}}^n(A)$ естественным образом определяется действие группы $G_{n+1} = GL(n+1, A)$. Группа G_{n+1} действует в $\mathbf{P}^n(A)$ и $\widetilde{\mathbf{P}}^n(A)$ транзитивно; это вытекает из следующего утверждения.

Лемма 1. *Два вектора $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ и $x' = (x_1', \ldots, x'_{n+1})$ из A^{n+1} принадлежат одной и той же орбите группы G_{n+1}, тогда и только тогда, когда совпадают идеалы в A, порожденные соответственно $x_1, \ldots, x_{n+1}$ и $x_1', \ldots, x'_{n+1}$.*

Очевидно, что отношение инцидентности инвариантно относительно действия группы G_{n+1} в $\widetilde{\mathbf{P}}^n(A) \times \mathbf{P}^n(A)$.

2. Преобразование Радона в $\mathbf{P}^n(A)$. Пусть S^n, $\widetilde{S}^n$ — пространства функций соответственно на $\mathbf{P}^n(A)$ и $\widetilde{\mathbf{P}}^n(A)$ со значениями в фиксированном поле k характеристики 0. При $n > 1$ определим линейное отображение $L\colon S^n \to \widetilde{S}^n$ по формуле

$$(Lf)(\xi) = \varphi(\xi) = \sum_{\langle \xi,\, x \rangle = 0} f(x) \tag{1}$$

(т. е. сумма берется по всем $x \in \mathbf{P}^n(A)$, инцидентным ξ). Отображение L назовем преобразованием Радона в пространстве $\mathbf{P}^n(A)$. В данной статье будет установлен следующий результат.

Теорема 1. *Преобразование Радона $L\colon S^n \to \widetilde{S}^n$ биективно тогда и только тогда, когда A — кольцо главных идеалов (т. е. все идеалы в A главные).*

Кроме того, для случая кольца главных идеалов будет построено обратное отображение L^{-1} (теорема 2).

Сначала сведем доказательство теоремы к случаю, когда кольцо A неразложимо в прямую сумму подколец. Предположим, что $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$. Обозначим через S_i^n и $\widetilde{S}_i^n$ подпространства функций на $\mathbf{P}^n(A_i)$ и $\widetilde{\mathbf{P}}^n(A_i)$ соответственно и через L_i — преобразование Радона в $\mathbf{P}^n(A_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Лемма 2. *Имеют место естественные изоморфизмы*:

$$\mathbf{P}^n(A) \cong \mathbf{P}^n(A_1) \times \ldots \times \mathbf{P}^n(A_k), \quad \widetilde{\mathbf{P}}^n(A) \cong \widetilde{\mathbf{P}}^n(A_1) \times \ldots \times \widetilde{\mathbf{P}}^n(A_k),$$

$$S^n \cong S_1^n \otimes \ldots \otimes S_k^n, \quad \widetilde{S}^n \cong \widetilde{S}_1^n \otimes \ldots \otimes \widetilde{S}_k^n.$$

При этом преобразованию Радона $L\colon S^n \to \widetilde{S}^n$ соответствует преобразование $L_1 \otimes \ldots \otimes L_k\colon S_1^n \otimes \ldots \otimes S_k^n \to \widetilde{S}_1^n \otimes \ldots \otimes \widetilde{S}_k^n$.

Из леммы 2 вытекает, что L биективно тогда и только тогда, когда биективны все L_i. Следовательно, если теорема 1 справедлива для колец, не разложимых в прямую сумму, то она справедлива для любых колец.

С этого момента мы будем рассматривать только кольца A, не разложимые в прямую сумму подколец.

3. Преобразование Радона в случае, когда A — кольцо главных идеалов. Здесь мы докажем первое утверждение теоремы 1: *если A — кольцо главных идеалов, то преобразование Радона в $\mathbf{P}^n(A)$ биективно.*

Опишем орбиты группы G_{n+1} в пространствах $\mathbf{P}^n(A) \times P^n(A)$ и $\widetilde{\mathbf{P}}^n(A) \times \times \mathbf{P}^n(A)$.

Лемма 3. *Если A — кольцо главных идеалов, то на каждой орбите группы G_{n+1} в $\mathbf{P}^n(A) \times P^n(A)$ имеется пара (x^0, y), где $x^0 = (0, \ldots, 0, 1)$, $y = (0, \ldots, 0, a, 1)$. При этом две пары (x^0, y)* и (x^0, y'), где $y = (0, \ldots, 0, a, 1)$, $y' = (0, \ldots, 0, a', 1)$, *принадлежат одной и той же орбите тогда и только тогда, когда совпадают идеалы в A, порожденные соответственно элементами a и a'.*

Лемма 4. *Две пары (ξ, x), (ξ', x') в $\widetilde{\mathbf{P}}^n(A) \times \mathbf{P}^n(A)$ принадлежат одной и той же орбите группы G_{n+1} тогда и только тогда, когда совпадают главные идеалы в A, порожденные соответственно $\langle \xi, x \rangle$ и $\langle \xi', x' \rangle$.*

Леммы 3 и 4 устанавливают взаимно однозначное соответствие между орбитами в $\mathbf{P}^n(A) \times \mathbf{P}^n(A)$ (соответственно в $\widetilde{\mathbf{P}}^n(A) \times \mathbf{P}^n(A)$) и идеалами в A.

Пусть теперь $\mathfrak{a}$ — произвольный идеал в A, $U_\mathfrak{a}$, $\widetilde{U}_\mathfrak{a}$ — орбиты группы G_{n+1} соответственно в $\mathbf{P}^n(A) \times \mathbf{P}^n(A)$ и $\widetilde{\mathbf{P}}^n(A) \times \mathbf{P}^n(A)$, отвечающие $\mathfrak{a}$.

Введем линейные отображения $M_\mathfrak{a}\colon \widetilde{S}^n \to S^n$ и $N_\mathfrak{a}\colon S^n \to S^n$ по следующим формулам:

$$(M_\mathfrak{a}\varphi)(x) = \sum_{(\xi, x) \in \widetilde{U}_\mathfrak{a}} \varphi(\xi), \tag{2}$$

$$(N_\mathfrak{a}f)(x) = \sum_{(x, y) \in U_\mathfrak{a}} f(y) \tag{3}$$

(суммирование в (2) ведется по всем ξ, для которых $(\xi, x) \in \widetilde{U}_\mathfrak{a}$, а в (3) — по всем y, для которых $(x, y) \in U_\mathfrak{a}$). В частности, оператор N_0, отвечающий нулевому идеалу в A, есть единичный оператор.

Лемма 5. *Для любого идеала $\mathfrak{a}$ в A имеет место соотношение*

$$M_\mathfrak{a} L = \sum c_{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}} N_\mathfrak{b}, \tag{4}$$

где $c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \in \mathbf{Z}$; суммирование ведется по множеству всех идеалов $\mathfrak{b}$ в A. Здесь $c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ равно числу элементов $\xi \in \mathbf{P}^n(A)$, удовлетворяющих условиям $(\xi, x) \in \widetilde{U}_\mathfrak{a}$, $\langle \xi, y \rangle = 0$, где (x, y) — фиксированный элемент орбиты U (от выбора $(x, y) \in U_\mathfrak{b}$ число $c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ не зависит).

Из леммы 5 и из описания орбит $U_{\mathfrak{a}}$, $U_{\mathfrak{b}}$ легко следует

Лемма 6. 1) *Если* $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{b}$, *то* $c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = 0$. 2) *Для любого идеала* $\mathfrak{a}$ $c_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}} \neq 0$.

В силу леммы 6, соотношение (4) принимает вид

$$M_{\mathfrak{a}}L = \sum_{\mathfrak{b}\supseteq\mathfrak{a}} c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} N_{\mathfrak{b}}. \tag{5}$$

Теперь легко убедиться, что если A — кольцо главных идеалов, то при заданных $M_{\mathfrak{a}} L$ система уравнений (5) разрешима относительно $N_{\mathfrak{b}}$ и это решение единственно. В частности, имеем

$$N_0 = \sum_{\mathfrak{a}} c'_{0,\mathfrak{a}} M_{\mathfrak{a}} L, \tag{6}$$

где $\|c'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\|$ — матрица, обратная $\|c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\|$. Так как N_0 — единичный оператор, то отсюда непосредственно следует биективность отображения L *.

Из равенства (6) следует также

Теорема 2. *Если A — кольцо главных идеалов, неразложимое в прямую сумму, то преобразование L^{-1}, обратное к преобразованию Радона в* $\mathbf{P}^n(A)$, *имеет вид*

$$L^{-1} = \sum_{\mathfrak{a}} c'_{0,\mathfrak{a}} M_{\mathfrak{a}}. \tag{7}$$

Здесь $M_{\mathfrak{a}}$ — операторы $\tilde{S}^n \to S^n$, определенные по формулам (2), *а $c'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ — элементы матрицы, обратной* $\|c_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\|$.

В частности, для кольца вычетов по модулю p^r

$$L^{-1} = \sum_{s=0}^{r} c_s M_s,$$

где $(M_s\varphi)(x) = \sum_{\langle\xi,\, x\rangle = \lambda p^s} \varphi(\xi)$, $\lambda \in A^*$, а коэффициенты задаются формулами: $c_s = -p^{s-(n-1)(2r-1)}(p-1)/(p^n-1)$, $0 \leqslant s < r$, $c_r = p^{-(n-1)(r-1)} \times (p-1)/(p^n-1)$.

4. Преобразование Радона в случае, когда A не является кольцом главных идеалов. Здесь будет доказано обратное утверждение теоремы 1: *если A не является кольцом главных идеалов, то преобразование Радона в $\mathbf{P}^n(A)$ не биективно.*

Сначала отметим некоторые свойства конечных коммутативных колец с единицей, не разложимых в прямую сумму.

1) существует (и однозначно определено) такое простое число p, что $p^m A = 0$ для некоторого натурального m;

2) любой элемент кольца либо обратим, либо нильпотентен; таким образом, множество всех обратимых элементов в A есть $A \setminus \mathfrak{R}$, где $\mathfrak{R}$ — радикал кольца A.

3) $A/\mathfrak{R} \cong F_q$, где F_q — поле, порядок которого q есть степень числа p.

Лемма 7. *Пусть A не является кольцом главных идеалов, но все его фактор-кольца $A/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \neq 0$,— кольца главных идеалов. Выберем по представителю $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ в каждом из классов смежности $A/\mathfrak{R}$, где $\mathfrak{R}$ — радикал A. Тогда существуют элементы $x \neq 0$ и $y \neq 0$ в $\mathfrak{R}$ и натуральное число $r \geqslant 1$ такие, что $x\mathfrak{R} = 0$, $y^r\mathfrak{R} = 0$ и любой элемент $u \in A$ однозначно*

* Для случая колец вычетов по модулю n это утверждение доказано Н. В. Павленко.

представим в виде

$$u = a + bx + c_1 y + \ldots + c_r y^r, \tag{8}$$

где a, b, c_i — элементы множества $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$.

Лемма 8. *Пусть $A \to B$ — эпиморфизм колец, L_A, L_B — преобразование Радона соответственно в $\mathbf{P}^n(A)$ и $\mathbf{P}^n(B)$.*

Тогда, если L_A биективно, то и L_B биективно.

Теперь докажем, что если A не является кольцом главных идеалов, то преобразование Радона в $\mathbf{P}^n(A)$ имеет ядро, отличное от нуля.

В силу леммы 8, утверждение достаточно доказать для кольца A, все фактор-кольца которого $A/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \neq 0$,— кольца главных идеалов. Структура такого кольца описана в лемме 7. Пусть λ_i, x, y, r — те же, что и в формулировке леммы 7.

Рассмотрим подпространство $S_0^n \subset S^n$ функций $f(x_1, \ldots, x_{n+1})$, сосредоточенных на подмножестве элементов $(1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, где $x_i \in \mathfrak{R}$, $2 \leqslant i \leqslant n+1$. В силу (8), $|\mathfrak{R}| = q^{r+1}$ и, следовательно, $\dim S_0^n = q^{n(r+1)}$. Вычислим, сколькими линейными соотношениями выражается условие принадлежности f ядру преобразования Радона.

Разобьем $\widetilde{\mathbf{P}}^n(A)$ на непересекающиеся подмножества $V_s = \{(\xi^1, \ldots, \xi^{n+1}) \mid \xi^1, \ldots, \xi^{n+1}$ необратимы, $\xi^s = 1\}$, $1 \leqslant s \leqslant n+1$. Если $\xi \in V_1$, то гиперплоскость ξ не пересекает $\operatorname{supp} f$, а потому $(Lf)(\xi) = 0$ для любого $f \in S_0^n$ и любого $\xi \in V_1$. Пусть теперь $\xi \in V_s$, $s > 1$, тогда условие, что $(Lf)(\xi) = 0$ на V_s выражается системой уравнений

$$\sum_{x_i} f(x_1, \ldots, x_{s-1}, -\xi^1 - \xi^2 x_2 - \ldots - \xi^{s-1} x_{s-1} - \xi^{s+1} x_{s+1} - \ldots - \xi^{n+1} x_{n+1},$$
$$x_{s+1}, \ldots, x_{n+1}) = 0, \tag{9}$$

где суммирование ведется по $x_i \in \mathfrak{R}$. Здесь $\xi^1, \ldots, \xi^{s-1}$ — произвольные элементы из $\mathfrak{R}$, а $\xi^{s+1}, \ldots, \xi^{n+1}$ — произвольные элементы из A. Поскольку $x\mathfrak{R} = 0$, $y^r \mathfrak{R} = 0$, то замена любого ξ^i, $i \neq 1$, s на $\xi^i + ax + c_r y^r$ не меняет уравнения (9). Отсюда на основании леммы 7 следует, что ξ^1 пробегает q^{r+1} значений, а ξ^i при $2 \leqslant i \leqslant s-1$ фактически пробегает q^{r-1} значений, а при $s+1 \leqslant i \leqslant n+1$ q^r значений. Таким образом, число соотношений вида (9) при $\xi \in V_s$, $s > 1$, равно $q^{r+1+(s-1)(r-1)+(n-s)r} = q^{nr-(s-2)}$. Суммируя по s, заключаем: условие принадлежности $f \in S_0^n$ ядру преобразования Радона задается системой линейных однородных уравнений, число которых равно $q^{nr+1} + q^{nr} + \ldots + q^{nr-(n-2)} = q^{nr+1}(1 - q^{-n}) / (1 - q^{-1})$. Так как это число меньше, чем $q^{n(r+1)} = \dim S_0^n$, то система (9) имеет ненулевое решение. Теорема 1 доказана.

Авторы глубоко признательны Г. Б. Клейнеру, беседы с которым были очень существенны для возникновения этой работы.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
11 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Bass, Algebraic K-theory, N. Y., 1968. [2] С. Ленг, Алгебра, М., 1968.