

УДК 519.55

МАТЕМАТИКА

И. Ц. ГОХБЕРГ, Ю. ЛАЙТЕРЕР

О ФАКТОРИЗАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНТУРА В БАНАХОВЫХ АЛГЕБРАХ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 2 II 1972)

1. Пусть Γ — контур в комплексной плоскости, состоящий из конечного числа непересекающихся замкнутых спрямляемых жордановых кривых. Будем предполагать, что контур Γ разбивает расширенную плоскость на два открытых множества F^+ и F^- , причем каждая точка Γ является граничной для F^+ и F^- . Будем также считать, что $0 \in F^+$, $\infty \in F^-$.

Обозначим через $\mathfrak{B}$ некоторое банахово пространство и через $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{B})$ — алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{B}$. Пусть $A(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, — непрерывная на Γ оператор-функция в $\mathfrak{L}$. Следуя ⁽¹⁾, представление оператор-функции $A(\zeta)$ в виде $A(\zeta) = A_-(\zeta)D(\zeta)A_+(\zeta)$ назовем факторизацией оператор-функции $A(\zeta)$ относительно контура Γ , если множители обладают следующими свойствами:

1) оператор-функция $D(\zeta)$ имеет вид $D(\zeta) = \sum_{j=1}^n \zeta^{\kappa_j} P_j + P_0$, где опе-

раторы P_j , $j = 1, 2, \dots, n$, являются взаимно ортогональными одномерными проекторами из $\mathfrak{L}$, $P_0 = I - P_1 - P_2 - \dots - P_n$ и $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_n$ — некоторые целые числа, отличные от нуля; 2) оператор-функции $A_-(\zeta)$, $A_+(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, допускают продолжения, голоморфные внутри и непрерывные, включая границу, соответственно в множествах $F^- \cup \Gamma$, $F^+ \cup \Gamma$, причем все значения $A_{\pm}(\zeta)$ и их продолжений являются обратимыми операторами.

Числа $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$ однозначно определяются оператор-функцией $A(\zeta)$. Число $\text{Ind } A(\zeta) = \kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_n$ называется суммарным индексом $A(\zeta)$.

В настоящем сообщении развиваются и обобщаются результаты о факторизации относительно контура Γ из статьи ⁽¹⁾. Для определенного класса оператор-функций получена формула для суммарного индекса и установлена устойчивость этого индекса. В доказательствах существенную роль играют теоремы о факторизации из ⁽²⁾, см. § 7.

В случае конечномерного пространства $\mathfrak{B}$ основные из приводимых теорем установлены ранее ⁽³⁻⁵⁾.

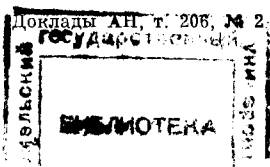
2. Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторая банахова алгебра операторов из $\mathfrak{L}$ (с обычными операциями) и со своей нормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{K}}$, обладающей следующими свойствами: а) $\|X\|_{\mathfrak{L}} \leq \|X\|_{\mathfrak{K}}$; б) множество $\mathfrak{K}$ всех конечномерных операторов из $\mathfrak{L}$ и единичный оператор I принадлежат $\mathfrak{K}$; в) если $X \in \mathfrak{K}$ и X обратим, то $X^{-1} \in \mathfrak{K}$.

В дальнейшем всюду $\mathfrak{E}$ будет обозначать банахову алгебру с нормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{E}}$ непрерывных (в норме $\|\cdot\|$) оператор-функций на Γ со значениями из $\mathfrak{K}$, обладающую следующими свойствами:

$$\max_{\zeta \in \Gamma} \|A(\zeta)\|_{\mathfrak{K}} \leq c \|A(\zeta)\|_{\mathfrak{E}}, \quad A(\zeta) \in \mathfrak{E},$$

где c — константа, не зависящая от $A(\zeta)$; все оператор-функции вида

$$r_1(\zeta)T_1 + r_2(\zeta)T_2 + \dots + r_n(\zeta)T_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$



где $T_j \in \mathfrak{R}$, $r_j(\zeta)$ — рациональные функции с полюсами вне Γ , принадлежажат алгебре $\mathfrak{E}$ и образуют в ней плотное множество.

Обозначим через $\mathfrak{E}^+$ ($\mathfrak{E}^-$) подалгебру $\mathfrak{E}$, состоящую из всех оператор-функций $A(\zeta) \in \mathfrak{E}$, допускающих продолжение в $\Gamma \cup F^+$ ($\Gamma \cup F^-$), голоморфное в F^+ (F^-) и непрерывное вплоть до границы. Положим $\mathfrak{E}_0^+ = \{A(\zeta) : A(\zeta) \in \mathfrak{E}^+, A(0) = 0\}$ и $\mathfrak{E}_0^- = \{A(\zeta) : A(\zeta) \in \mathfrak{E}^-, A(\infty) = 0\}$.

Будем говорить, что оператор-функция $A(\zeta) \in \mathfrak{E}$ допускает факторизацию относительно Γ в алгебре $\mathfrak{E}$, если $A(\zeta)$ допускает факторизацию относительно Γ : $A(\zeta) = A_-(\zeta)D(\zeta)A_+(\zeta)$ и $A_-(\zeta)$, $A_+^{-1}(\zeta) \in \mathfrak{E}^-$; $A_+(\zeta)$, $A_+^{-1}(\zeta) \in \mathfrak{E}^+$.

Алгебра $\mathfrak{E}$ называется распадающейся, если она распадается в прямую сумму ее подалгебр $\mathfrak{E}^+$ и $\mathfrak{E}^-$. Для распадающейся алгебры через P обозначим проектор, проектирующий $\mathfrak{E}$ на $\mathfrak{E}^+$ параллельно $\mathfrak{E}_0^-$, а через P^0 — проектор, проектирующий $\mathfrak{E}$ на $\mathfrak{E}_0^+$, параллельно $\mathfrak{E}^-$. Положим $Q = I - P$ и $Q^0 = I - P^0$.

3. Обозначим через $\mathfrak{R}_\infty$ замыкание в $\mathfrak{R}$ множества $\mathfrak{R}$ всех конечномерных операторов из $\mathfrak{L}$ и через $\mathfrak{E}_\infty$ — замыкание по норме $\mathfrak{E}$ всех оператор-функций вида (1), для которых $T_j \in \mathfrak{R}_\infty$.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{E}$ — распадающаяся алгебра и $A(\zeta)$ — оператор-функция $\mathfrak{E}$, все значения которой обратимы. Если все значения оператор-функции $PA(\zeta)$, $\zeta \in F^+ \cup \Gamma$, являются Φ -операторами и $QA(\zeta) \in \mathfrak{E}_\infty$, то $A(\zeta)$ допускает факторизацию относительно Γ в $\mathfrak{E}$: $A(\zeta) = A_-(\zeta)D(\zeta)A_+(\zeta)$, в которой $A_-(\zeta) - I$, $A_+^{-1}(\zeta) - I \in \mathfrak{E}_\infty$.

Двойственной в определенном смысле к этой теореме является

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{E}$ — распадающаяся алгебра и $A(\zeta)$ — оператор-функция из $\mathfrak{E}$, все значения которой обратимы. Если все значения оператор-функций $Q^0A(\zeta)$, $\zeta \in F^- \cup \Gamma$, являются Φ -операторами и $P^0A(\zeta) \in \mathfrak{E}_\infty$, то $A(\zeta)$ допускает факторизацию относительно Γ в $\mathfrak{E}$: $A(\zeta) = A_-(\zeta)D(\zeta)A_+(\zeta)$, в которой $A_+(\zeta) - I$, $A_+^{-1}(\zeta) - I \in \mathfrak{E}_\infty$.

4. Приведем некоторые примеры приложений теоремы 1.

Теорема 3. Пусть $A(\zeta)$, $|\zeta| = 1$, — оператор-функция с обратимыми значениями, разлагающаяся в абсолютно сходящийся ряд Фурье

$$A(\zeta) = \dots + \zeta^{-1}A_{-1} + A_0 + \zeta A_1 + \dots; A_j \in \mathfrak{R}; \\ \dots + \|A_{-1}\|_{\mathfrak{R}} + \|A_0\|_{\mathfrak{R}} + \|A_1\|_{\mathfrak{R}} + \dots < \infty.$$

Если $A_j \in \mathfrak{R}_\infty$, $j = -1, -2, \dots$, и все значения оператор-функции $A_0 + \zeta A_1 + \dots$, $|\zeta| < 1$, являются Φ -операторами, то $A(\zeta)$ допускает факторизацию относительно единичной окружности $|\zeta| = 1$: $A(\zeta) = A_-(\zeta)D(\zeta)A_+(\zeta)$, в которой множители $A_\pm(\zeta)$ и $A_\pm^{-1}(\zeta)$ имеют вид $A_\pm^{\pm 1}(\zeta) = I + S_0^\pm + \zeta S_1^\pm + \zeta^2 S_2^\pm + \dots$, $A_\pm^{\pm 1}(\zeta) = I + \zeta^{-1}T_1^\pm + \zeta^{-2}T_2^\pm + \dots$, где $S_j^\pm \in \mathfrak{R}$, $T_j^\pm \in \mathfrak{R}_\infty$ и $\|S_1^\pm\|_{\mathfrak{R}} + \|S_2^\pm\|_{\mathfrak{R}} + \dots < \infty$, $\|T_1^\pm\|_{\mathfrak{R}} + \|T_2^\pm\|_{\mathfrak{R}} + \dots < \infty$.

Обозначим через $L_1(\mathfrak{R})$ банахово пространство всех сильно измеримых оператор-функций $F(t)$, $-\infty < t < \infty$, со значениями из $\mathfrak{R}$, для которых

$$\|F(t)\|_{L_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \|F(t)\|_{\mathfrak{R}} dt < \infty.$$

Теорема 4. Пусть $F(t) \in L_1(\mathfrak{R})$ и все значения оператор-функции

$$A(\lambda) = I + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} F(t) dt, \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

являются обратимыми операторами. Если все значения оператор-функции

$$I + \int_0^{\infty} e^{i\lambda t} F(t) dt, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0,$$

являются Φ -операторами, а значения $F(t)$ при $-\infty < t < \infty$ принадлежат $\mathfrak{R}_\infty$, то оператор-функция $A(\lambda)$ допускает факторизацию относительно вещественной оси вида

$$A(\lambda) = A_-(\lambda) \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i} \right)^{\kappa_j} P_j + P_0 \right) A_+(\lambda),$$

где P_j , $j = 1, 2, \dots, n$, — взаимно ортогональные одномерные проекторы, $P_0 = I - P_1 - P_2 - \dots - P_n$, κ_j — целые числа и множители $A_\pm(\lambda)$ допускают следующие представления:

$$A_\pm^{\pm 1}(\lambda) = I + \int_0^\infty e^{i\lambda t} S^\pm(t) dt, \quad A_\pm^{\pm 1}(\lambda) = I + \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda t} T^\pm(t) dt,$$

в которых $S^\pm(t)$, $T^\pm(t) \in L_1(\mathfrak{R})$, причем все значения $T^\pm(t)$ принадлежат $\mathfrak{R}_\infty$.

Пусть G — открытое множество на комплексной плоскости, содержащее контур Γ , и M — замыкание G . Предположим, что точки $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$ не принадлежат M . Рассмотрим алгебру $C(M)$ всех оператор-функций со значениями из $\mathfrak{R}$, непрерывных по норме $\mathfrak{R}$ на M и голоморфных в G . Обозначим через $C^\pm(M)$ подалгебру $C(M)$, состоящую из оператор-функций, голоморфных в $M \cup F^\pm$. Положим $C_0^+(M) = \{A(\zeta): A(\zeta) \in C^+(M), A(0) = 0\}$ и $C_0^-(M) = \{A(\zeta): A(\zeta) \in C^-(M), A(\infty) = 0\}$. Легко видеть, что $C(M) = C^+(M) + C_0^-(M)$. Обозначим через P проектор, проектирующий $C(M)$ на $C^+(M)$ параллельно $C_0^-(M)$, и через Q — проектор $I - P$. Обозначим еще через $C_\infty(M)$ подалгебру $C(M)$, состоящую из оператор-функций $A(\zeta) \in C(M)$, все значения которых принадлежат $\mathfrak{R}_\infty$.

Теорема 5. Пусть $A(\zeta)$ — оператор-функция из $C(M)$, принимающая только обратимые значения. Если все значения оператор-функции $PA(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma \cup F^+$, являются Φ -операторами, а $QA(\zeta) \in C_\infty(M)$, то $A(\zeta)$ допускает факторизацию относительно Γ : $A(\zeta) = A_-(\zeta)D(\zeta)A_+(\zeta)$, в которой $A_+(\zeta)$, $A_+^{-1}(\zeta) \in C^+(M)$ и $A_-(\zeta) - I$, $A_-^{-1}(\zeta) - I \in C^-(M) \cap C_\infty(M)$.

Из последней теоремы вытекает

Следствие 1. Пусть оператор-функция $A(\zeta)$ имеет вид $A(\zeta) = \zeta^{-h}A_{-h} + \dots + \zeta^{-1}A_{-1} + A_0 + \zeta A_1 + \dots + \zeta^n A_n$, где $A_j \in \mathfrak{R}$ при $j \geq 0$ и $A_j \in \mathfrak{R}_\infty$ при $j < 0$. Если на контуре Γ все значения $A(\zeta)$ обратимы, то $A(\zeta)$ допускает факторизацию относительно Γ : $A(\zeta) = A_-(\zeta)D(\zeta)A_+(\zeta)$, в которой множители имеют вид $A_+(\zeta) = A_0^+ + \zeta A_1^+ + \dots + \zeta^r A_r^+$ и $A_-(\zeta) = I + \zeta^{-1}A_1^- + \dots + \zeta^{-m}A_m^-$, $A_j^+ \in \mathfrak{R}$, $A_j^- \in \mathfrak{R}_\infty$.

Предложения, аналогичные теоремам 3 — 5 и следствию 1, можно вывести и из теоремы 2.

5. Предположим, что контур Γ является гладким. Обозначим через H_α , $0 < \alpha < 1$, алгебру всех оператор-функций на Γ со значениями из $\mathfrak{R}$, удовлетворяющих условию Гёльдера в норме $\|\cdot\|$ с показателем α . Алгебра H_α (с соответствующей нормой) распадается.

Теорема 6. Пусть оператор-функция $A(\zeta) \in H_\alpha$ принимает только обратимые значения. Если все значения оператор-функции $PA(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma \cup F^+$, являются Φ -операторами и все значения $QA(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, содержатся в $\mathfrak{R}_\infty$, то $A(\zeta)$ допускает факторизацию относительно Γ в H_α : $A(\zeta) = A_-(\zeta)D(\zeta)A_+(\zeta)$, в которой все значения оператор-функций $A_-(\zeta) - I$, $A_-^{-1}(\zeta) - I$, $\zeta \in \Gamma \cup F^-$, принадлежат $\mathfrak{R}_\infty$.

Имеет место также теорема, двойственная к теореме 6. Отметим, что теорема 6 не вытекает из теоремы 1, так как оператор-функции вида (1) не образуют плотного множества в H_α . При более жестких ограничениях предложение, близкое к теореме 6, получено в (6).

6. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\mathfrak{E}$ — распадающаяся алгебра, удовлетворяющая условиям п. 2. Через $\mathfrak{F}_1$ ($\mathfrak{F}_2$) обозначим множе-

ство всех оператор-функций $A(\zeta) \in \mathfrak{E}$, удовлетворяющих условиям теоремы 1 (теоремы 2).

Теорема 7. Пусть оператор-функция $A(\zeta) \in \mathfrak{E}$ допускает факторизацию относительно Γ в $\mathfrak{E}$, $X(\zeta) \in \mathfrak{F}_1$ и $Y(\zeta) \in \mathfrak{F}_2$.

Тогда оператор-функция $X(\zeta)A(\zeta)Y(\zeta)$ допускает факторизацию относительно Γ в $\mathfrak{E}$ и $\text{Ind } X(\zeta)A(\zeta)Y(\zeta) = \text{Ind } X(\zeta) + \text{Ind } A(\zeta) + \text{Ind } Y(\zeta)$.

Теорема 8. Пусть оператор-функции $B(\zeta)$ и $A(\zeta)$ из $\mathfrak{E}$ допускают факторизацию относительно Γ в $\mathfrak{E}$. Если величина $\|A(\zeta) - B(\zeta)\|_{\mathfrak{E}}$ достаточно мала, то $\text{Ind } A(\zeta) = \text{Ind } B(\zeta)$.

Обозначим через $\rho(A)$ спектральный радиус оператора $A \in \mathfrak{L}$.

Теорема 9. Пусть оператор-функция $A(\zeta) \in \mathfrak{F}_1$, а $B(\zeta) \in \mathfrak{E}$ обладает свойством $QB(\zeta) \in \mathfrak{E}_{\infty}$. Если $\max \rho(A^{-1}(\zeta)B(\zeta)) < 1$, $\zeta \in \Gamma$, то оператор-функция $A(\zeta) + B(\zeta) \in \mathfrak{F}_1$ и $\text{Ind } (A(\zeta) + B(\zeta)) = \text{Ind } A(\zeta)$.

Теорема 9 сохраняет силу, если в ее формулировке заменить $\mathfrak{F}_1$ на $\mathfrak{F}_2$ и условие $QB(\zeta) \in \mathfrak{E}_{\infty}$ — на условие $P^0B(\zeta) \in \mathfrak{E}_{\infty}$.

7. Как известно, оператор $X \in \mathfrak{L}$ называется ядерным, если он представим в виде $Xf = \Phi_1(f)\varphi_1 + \Phi_2(f)\varphi_2 + \dots$, где $\varphi_j \in \mathfrak{B}$, $\Phi_j \in \mathfrak{B}^*$ и $\|\Phi_1\| \|\varphi_1\| + \|\Phi_2\| \|\varphi_2\| + \dots < \infty$. Величина $\inf(\|\Phi_1\| \|\varphi_1\| + \|\Phi_2\| \|\varphi_2\| + \dots)$, где нижняя грань распространяется на всевозможные указанные представления оператора X , называется ядерной нормой. Предположим что $\mathfrak{B}$ является пространством с базисом. Тогда для ядерного оператора X сумма $\Phi_1(\varphi_1) + \Phi_2(\varphi_2) + \dots$ не зависит от представления оператора X и обозначается через $\text{sp } X$.

Теорема 10. Пусть $A(\zeta) \in \mathfrak{F}_1$ обладает следующими свойствами $dA(\zeta)/d\zeta \in \mathfrak{E}$, все значения оператор-функции $Q dA(\zeta)/d\zeta$, $\zeta \in \Gamma$, являются ядерными операторами и $Q dA(\zeta)/d\zeta$ непрерывна по ядерной норме.

Тогда оператор $\int_{\Gamma} A'(\zeta) A^{-1}(\zeta) d\zeta$ является ядерным и

$$\text{Ind } A(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \text{sp} \int_{\Gamma} A'(\zeta) A^{-1}(\zeta) d\zeta.$$

Эта теорема сохраняет силу, если в ее формулировке заменить $\mathfrak{F}_1$ на $\mathfrak{F}_2$ и $Q dA(\zeta)/d\zeta$ на $P^0 dA(\zeta)/d\zeta$.

Институт математики с Вычислительным центром
Академии наук МССР
Кишинев

Поступило
19 I 1972

Кишиневский государственный университет
им. В. И. Ленина

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. Ц. Гохберг, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, № 5 (1964). ² И. Ц. Гохберг, Изв. АН АрмССР, Математика, №№ 2, 3 (1971). ³ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, УМН, 13, в. 2 (1958). ⁴ И. Ц. Гохберг, УМН, 19, в. 1 (1964). ⁵ Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», 1968. ⁶ М. С. Будяну, Изв. АН МССР, № 7 (1965).