Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 4

УДК 517.948 **МАТЕМАТИКА**

М. Г. ГАСЫМОВ

К ТЕОРИИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. Н. Векуа 28 II 1972)

В данной работе в предположении существования k-факторизации (1) для полиномиального операторного пучка $P(\lambda)$ высокого порядка в гильбертовом пространстве H найдены достаточные условия нормальной разрешимости и корректности задачи

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u = f(t), \quad u_t^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, \ldots, k-1,$$

в пространстве $L_2[(0,\infty);H]$ (определение этого пространства имеется в (2)), где $1 \leqslant k \leqslant n$. Полученные результаты могут быть применены к дифференциальным уравнениям, рассмотренным в (3, 4), поскольку их символ $P(\lambda)$ зависит от перестановочных операторов и поэтому допускает факторизацию.

1. Пусть $B_1, \ldots, B_k$ и $C_1, \ldots, C_m$ являются линейными операторами в H. Рассмотрим полиномиальные пучки

$$P_-(\lambda) = \lambda^k E + \lambda^{k-1}B_1 + \ldots + B_k,$$

$$P_+(\lambda) = \lambda^m E + \lambda^{m-1}C_1 + \ldots + C_m.$$

Предположим, что $P_-(\lambda)$ и $P_+(\lambda)$ являются замкнутыми операторами с областями определений $D(P_-)$ и $D(P_+)$ соответственно, которые не зависят от λ и

$$D(P_-) \subseteq D(B_\beta),\ D(P_+) \subseteq D(C_\alpha),\ \beta = 1, \ldots, k,\ \alpha = 1, \ldots, m.$$

Рассмотрим уравнение

$$P_+(d/dt)P_-(d/dt)u(t) = f(t) \tag{1}$$

в пространстве $L_2[(0,\infty);H]$.

Определение 1. Пусть $f(t) \in L_2[(0,\infty);H]$. Вектор-функцию $u(t)$ назовем *регулярным решением уравнения* (1), если: 1) $u(t) \in L_2[(0,\infty);H]$; 2) $u(t)$ имеет сильно непрерывные производные в H до $(k-1)$-го порядка включительно при $t \in [0,\infty)$; 3) при любых α и β, где $0 < \alpha < \beta < \infty$, вектор-функции $\beta_{k-j}u^{(j)}(t) \in L_2[(\alpha,\beta);H]$, $j = 0, \ldots, k$; 4) вектор-функция $P_-(d/dt)u(t) = v(t) \in L_2[(0,\infty);H]$ и имеет сильно непрерывные производные до $(m-1)$-го порядка включительно при $t \in [0,\infty)$; 5) вектор-функции $C_{m-j}v^{(j)}(t) \in L_2[(\alpha,\beta);H]$, $j = 0, \ldots, m$; 6) $P_+(d/dt)v(t) \equiv f(t)$.

Присоединим к уравнению (1) начальные условия

$$u^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, \ldots, k-1. \tag{2}$$

Определение 2. Задачу (1)—(2) назовем *корректной*, если существуют подпространства $L_2^{(1)}$ и $L_2^{(2)}$ из $L_2[(0,\infty);H]$ такие, что для любой вектор-функции $f(t)$ из $L_2^{(1)}$ уравнение (1) имеет регулярное решение $u(t)$ из $L_2^{(2)}$ и

$$\int_0^\infty \|u(t)\|_H^2 dt \leqslant \mu \int_0^\infty \|f(t)\|_H^2 dt. \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем везде через μ обозначаются различные постоянные числа. Это определение близко к определению корректных в смысле А. Н. Тихонова ([5]) задач.

Определение 3. Корректную задачу (1), (2) назовем нормально разрешимой, если подпространства $L^{(1)}$ -- $L^{(2)}$ имеют конечные коразмерности.

Теорема 1. *Пусть полиномиальные пучки $P_-(\lambda)$ и $P_+(\lambda)$ удовлетворяют следующим условиям:*

а) *резольвенты $P_\pm^{-1}(\lambda)$ регулярны в полуплоскостях $\mp\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ соответственно, за исключением конечного числа точек, которые являются характеристическими числами конечной алгебраической кратности;*

б) *при больших λ с $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$*

$$\|B_j P_-^{-1}(\lambda)\| \leqslant \mu (1 + |\lambda|)^{-k+j}, \quad j = 0, \ldots, k;$$

в) *при больших λ с $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$*

$$\|C_j P_+^{-1}(\lambda)\| \leqslant \mu (1 + |\lambda|)^{-m+j}, \quad j = 0, \ldots, m.$$

Тогда задача (1), (2) *является нормально разрешимой.*

Замечание 1. При условиях теоремы 1 имеет место более сильная корректность. А именно,

$$\sum_{j=0}^{k} \int_0^\infty \|B_{k-j} u_t^{(j)}(t)\|_H^2 dt \leqslant \mu \int_0^\infty \|f(t)\|_H^2 dt.$$

Замечание 2. Если все условия теоремы 1 выполняются и $P_\pm^{-1}(\lambda)$ не имеют особенностей в полуплоскостях $\pm\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ соответственно, то решение задачи (1), (2) представляется в виде

$$u(t) = \int_0^\infty K(t, x) f(x)\, dx \equiv \mathrm{K} f, \tag{4}$$

где

$$K(t, x) = \begin{cases} \int_0^x F_-(t-s) F_+(s-x)\, dx, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \int_0^t F_-(t-s) F_+(s-x)\, ds, & x \leqslant t < \infty, \end{cases} \tag{5}$$

$$F_\mp(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} P_\mp^{-1}(\lambda)\, e^{\lambda t} d\lambda. \tag{6}$$

Замечание 3. В некоторых случаях можно непосредственно вычислить оператор-функции $F_-(t)$ и $F_+(t)$. Пусть, например, операторы $A_1, \ldots, A_m$ и $D_1, \ldots, D_k$ — нормальные, $A_\alpha A_\beta = A_\beta A_\alpha$, $D_\alpha D_\beta = D_\beta D_\alpha$, спектры операторов $A_1, \ldots, A_m$ и $D_1, \ldots, D_k$ лежат в областях $\{\lambda\colon \operatorname{Re}\lambda > 0,\ |\arg\lambda| \leqslant {}^1/_2\pi - \varepsilon\}$ и $\{\lambda\colon \operatorname{Re}\lambda < 0,\ |\arg\lambda - \pi| \leqslant {}^1/_2\pi - \varepsilon\}$ соответственно, $0 < \varepsilon < {}^1/_2\pi$, а операторы $A_\alpha - A_\beta$ и $D_\alpha - D_\beta$ имеют ограниченные обратные при $\alpha \neq \beta$. Положим

$$P_+(\lambda) = \prod_{j=1}^{m} (\lambda - A_j), \quad P_-(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda - D_j). \tag{7}$$

Тогда

$$F_+(t) = \sum_{\alpha=1}^{m} E_\alpha^+ e^{A_\alpha t}, \quad E_\alpha^+ = \prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{m} (A_\alpha - A_\beta)^{-1}, \quad t \leqslant 0, \tag{8}$$

$$F_-(t) = \sum_{\alpha=1}^{k} E_\alpha^- e^{D_\alpha t}, \quad E_\alpha^- = \prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{k} (D_\alpha - D_\beta)^{-1}, \quad t \geqslant 0. \tag{9}$$

Замечание 4. Если в замечании 3 дополнительно предполагать, что $A_\alpha D_\beta = D_\beta A_\alpha$ для всех $\alpha = 1, \ldots, m$ и $\beta = 1, \ldots, k$, то при $t < x$

$$K(t, x) = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{k} E_\alpha^+ E_\beta^- (D_\beta - A_\alpha)^{-1} [e^{-D_\beta (t-x)} - e^{D_\beta t} e^{-A_\alpha x}]. \tag{10}$$

Аналогичная формула имеет место также при $t > x$.

Замечание 5. Пусть S является линейным оператором в пространстве $L_2[(0, \infty); H]$, область определения которого содержит все функции типа регулярного решения. Предположим, что выполняются условия замечания 2 и оператор SK является вполне непрерывным в $L_2[(0, \infty); H]$. Тогда задача $\left[P\left(\frac{d}{dt}\right) + S\right]u = f(t)$ и (2) является нормально разрешимой в $L_2[(0, \infty); H]$.

2. Обозначим через L_0 множество всех вектор-функций из $L_2[(0, \infty); H]$, обращающихся в нуль в окрестности нуля и бесконечности и таких, что $\varphi^{(m-1)}(t)$ сильно непрерывны в H и

$$C_j^* \varphi^{(m-j)}(t) \in L_2[(0, \infty); H], \quad j = 1, \ldots, m.$$

Предположим, что множество L_0 всюду плотно в $L_2[(0, \infty); H]$ (нетрудно найти условия на операторы C_j, $j = 1, \ldots, m$, при которых это предположение выполняется).

Определение 4. Пусть $f(t) \in L_2[(0, \infty); H]$. Вектор-функцию $u(t)$ назовем обобщенно-регулярным решением уравнения (1), если выполняются условия 1), 2), 3) определения 1,

$$P_-\left(\frac{d}{dt}\right) u(t) = v(t) \in L_2[(0, \infty); H]$$

и, если положить

$$P_+^*\left(-\frac{d}{dt}\right) = \sum_{j=0}^{m} \left(-\frac{d}{dt}\right)^j C_j^*,$$

то для любой вектор-функции $\varphi(t)$ из L_0 имеем

$$\int_0^\infty \left(v(t), P_+^*\left(-\frac{d}{dt}\right)\varphi(t)\right)_H dt = \int_0^\infty (f(t), \varphi(t))_H dt.$$

Аналогично даются определения обобщенно-корректной задачи для (1), (2) и нормальной разрешимости этих задач.

Теорема 2. *Пусть полиномиальные пучки $P_-(\lambda)$ и $P_+(\lambda)$ удовлетворяют условиям* а) *и* б) *из теоремы* 1 *и при больших* λ *с* $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$

$$\| P_+^{-1}(\lambda)\| \leqslant \mu (1 + |\lambda|)^{-1}.$$

Тогда задача (1), (2) *является обобщенно-нормально разрешимой.*

Замечание 1. Если все условия теоремы 2 выполнены и операторы $P_\pm^{-1}(\lambda)$ не имеют особенностей в полуплоскостях $\pm\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ соответственно, то обобщенно-регулярное решение задачи (1), (2) представляется в виде (4), где оператор-функция $K(x, t)$ при $0 \leqslant x \leqslant t < \infty$ определяется по формуле, аналогичной (5).

Замечание. Если в замечании 3 к теореме 1 спектры операторов $A_1, \ldots, A_k$ лежат в области $\{\lambda\colon \operatorname{Re}\lambda \geqslant \varepsilon\}$ и выполнены остальные условия этого замечания то, вообще говоря, в этом случае задача (1), (2), где $P_+(\lambda) = \prod (\lambda - A_j)$ и $P_-(\lambda) = \prod (\lambda - D_j)$, будет обобщенно-корректной и для ее функции Грина имеет место формула типа (5), а $F_\pm(t)$ определяются по формулам (8) и (9). Далее, если $A_\alpha D_\beta = D_\beta A_\alpha$, то для функции Грина $K(x, t)$ имеет место формула типа (10).

3. Дифференциальное уравнение типа (1) можно рассмотреть также в пространстве $L_2[(0, T); H]$. В этом случае надо задавать еще m условий в точке T. Например, пусть

$$\frac{d^j}{dt^j} P_-\left(\frac{d}{dt}\right) u(t)\Big|_{t=T} = 0, \quad j = 0, \ldots, m-1. \tag{11}$$

Теорема 3. *При условии теоремы* 1 *задача* (1), (2), (11) *является нормально разрешимой.*

Отметим, что замечания типа 1—5 к теореме 1 имеют место также здесь.

4. В этой работе мы рассмотрели простые граничные условия. Аналогичные результаты имеют место также при более общих граничных условиях. Подробно эти вопросы будут изложены в другом месте.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
16 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Гасымов, ДАН, 200, № 1 (1971). [2] Э. Хилле, Р. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1962. [3] Г. Е. Шилов, Математический анализ (второй спец. курс), «Наука», 1965. [4] Ю. А. Дубинский, Тр. Московск. матем. общ., 20, 205 (1969). [5] А. Н. Тихонов, ДАН, 153, № 1, 49 (1963).