Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 4

УДК 519.4:517:513.88

МАТЕМАТИКА

Р. Я. ГРАБОВСКАЯ

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННОЙ С ОПЕРАЦИЕЙ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 13 III 1972)

Б. М. Левитаном ([1]) была найдена реализация алгебры Ли группы линейных преобразований прямой в виде дифференциальных операторов бесконечного порядка:

$$X_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad X_2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-2}}{n!} x^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}.$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. *На аналитических функциях оператор*

$$F_x f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-2}}{n!} x^n \frac{d^n f}{dx^n}$$

совпадает с оператором

$$F_x f(x) = \frac{x}{2} f'(x) + \frac{1}{4} [f(-x) - f(x)].$$

Целью настоящей работы является изучение системы уравнений

$$\begin{gathered} \partial^2 u / \partial x^2 = A_1 u, \\ \partial^2 u / \partial y^2 + F_x u = A_2 u, \end{gathered} \tag{1}$$

где $u(x, y)$ — искомая функция, $-\infty < x,\ y < \infty$, со значениями в банаховом пространстве E; A_1, A_2 — неограниченные замкнутые операторы с областями определения $D(A_1)$ и $D(A_2)$, плотными в пространстве E.

Как выяснено в работах Б. М. Левитана (см. ([1])), для системы (1) естественно ставить задачу о нахождении решения (1), удовлетворяющего следующим начальным данным:

$$u(0, 0) = u_0; \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = u_1; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = u_2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0, 0) = u_3. \tag{2}$$

Рассмотрим первое уравнение системы (1). В работе ([2]) найдены необходимые и достаточные условия равномерной корректности (см. ([3])) задачи Коши для такого уравнения. Общее решение его представимо в виде

$$u(x) = C(x, A_1) u_0 + S(x, A_1) u_0', \tag{3}$$

где $u_0,\ u_0' \in D(A_1)$. Здесь косинус-функция $C(x, A_1)$ является ограниченной оператор-функцией, удовлетворяющей функциональному уравнению $C(x+t,\ A_1) + C(x-t, A_1) = 2C(x, A_1)C(t, A_1)$ и условию $C(0, A_1) = I$. Эта функция представима в виде

$$C(x, A_1) u_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\sigma} \frac{e^{\lambda x}}{(\lambda - \sigma_1)^2} R(\lambda^2, A_1) [\lambda (\sigma_1^2 I + A_1) - 2\sigma_1 A_1] u_0 d\lambda. \tag{4}$$

$u_0 \in D(A_1)$, $\sigma < \sigma_1$. Функция $S(x, A_1)$ выражается через $C(x, A_1)$ по формуле

$$S(x, A_1) u_0' = \int_0^x C(\tau, A_1) u_0' d\tau. \tag{5}$$

С помощью (3) из первого уравнения (1) находим

$$u(x, y) = C(x, A_1) u(0, y) + S(x, A_1) \frac{\partial u}{\partial x}(0, y), \tag{6}$$

а из второго

$$u(x, y) = C(y, A_2) u(x, 0) + S(y, A_2) \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) - \int_0^y S(y - \tau, A_2) F_x u(x, \tau)\, d\tau \tag{7}$$

Из (7) при $x = 0$ получаем

$$u(0, y) = C(y, A_2) u_0 + S(y, A_2) u_2, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = C(y, A_2) u_1 + S(y, A_2) u_3. \tag{9}$$

При этом используются равенства $F_x f(x)|_{x=0} = 0$; $(F_x f(x))'_{x=0} = 0$. Подставляя (8), (9) в (6), получим формальное решение задачи (1), (2):

$$u(x, y) = C(x, A_1) C(y, A_2) u_0 + C(x, A_1) S(y, A_2) u_2 + \\ + S(x, A_1) C(y, A_2) u_1 + S(x, A_1) S(y, A_2) u_3. \tag{10}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1) *операторы A_1, A_2 при* $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ *имеют резольвенты, удовлетворяющие оценкам*

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda \cdot R(\lambda^2, A_i)) \right\| \leqslant \frac{Mn!}{(|\operatorname{Re}\lambda| - \omega)^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots; \quad i = 1, 2;$$

2) *множество $D_1 = D(A_1) \cap D(A_2)$ инвариантно относительно резольвент $R(\lambda, A_i)$;*

3) *на D_2-совокупности всех элементов из E, на которых определены произведения A_1A_2, A_2A_1, A_1^2, A_2^2, выполнено соотношение*

$$[A_2, A_1] u_0 = A_2 A_1 u_0 - A_1 A_2 u_0 = A_1 u_0; \tag{11}$$

4) *множество D_2 плотно в D_1 по норме*

$$\|u\|_1 = \|u\| + \|A_1 u\| + \|A_2 u\|.$$

Тогда задача (1), (2) *имеет единственное решение при любых* $u_0, u_1, u_2, u_3 \in D_1$.

Для доказательства теоремы 1 мы проверяем, что в условиях теоремы формула (10) дает решение задачи (1), (2). Для этого приходится существенно использовать соотношение коммутации (11) и получить из него ряд важных следствий.

Лемма 2. *Для любого элемента $u \in D_1$ справедливы тождества*

$$F_x C(x, A_1) u = [A_2, C(x, A_1)] u, \tag{12}$$

$$F_x S(x, A_1) u = [A_2, S(x, A_1)] u, \tag{13}$$

$$A_1 \cdot C(x, A_2) u = C(x, A_2 - I) u. \tag{14}$$

Вывод тождеств (12)—(14) основан на соотношениях коммутации между операторами алгебры Ли и их резольвентами, полученными в работе [4], которые в нашем случае принимают вид

$$[A_2, R(\lambda, A_1)] u = -A_1 \cdot R^2(\lambda, A_1) u,$$

$$A_1 \cdot R(\lambda, A_2) u = R(\lambda + 1, A_2) u.$$

Эти соотношения вместе с формулами для представления $C(x, A_i)$ и $S(x, A_i)$ через резольвенты, полученные из (4), позволяют установить тождества (12)—(14) для любого элемента $u \in D_2$. С помощью предельного перехода и с учетом условия 4) показывается их справедливость для $u \in D_1$.

Лемма 3. *Множество D_1 инвариантно относительно косинус-функций $C(x, A_1)$ и $C(x, A_2)$.*

В доказательстве используются замкнутость операторов A_1, A_2 условия 2), 4) и тождества (12), (14), верные на D_2.

Из леммы 3 и выражения (5) следует инвариантность D_1 относительно функций $S(x, A_i)$.

Покажем, что функция (10) является решением задачи (1), (2). Начальные условия (2) удовлетворяются в силу свойств $C(0, A_i) = I$; $S(0, A_i) = 0$, $i = 1, 2$. Лемма 3 позволяет легко проверить, что функция (10) удовлетворяет первому уравнению системы (1).

Докажем, что каждое из четырех слагаемых функции (10) является решением второго уравнения. Действительно, после подстановки в уравнение получаем

$$F_x C(x, A_1) \cdot C(y, A_2) u_0 = [A_2, C(x, A_1)] \cdot C(y, A_2) u_0,$$

$$F_x C(x, A_1) \cdot S(y, A_2) u_2 = [A_2, C(x, A_1)] \cdot S(y, A_2) u_2,$$

$$F_x S(x, A_1) \cdot C(y, A_2) u_1 = [A_2, S(x, A_1)] \cdot C(y, A_2) u_1,$$

$$F_x S(x, A_1) \cdot S(y, A_2) u_3 = [A_2, S(x, A_1)] \cdot S(y, A_2) u_3.$$

Эти равенства справедливы в силу 2,3 лемм.

Таким образом теорема 1 доказана.

Замечание. Если выполнены только условия 1), 2), 3), то предыдущие рассуждения позволяют доказать существование единственного решения при любых u_0, u_1, u_2, $u_3 \in D_2$.

Пусть выполнены условия теоремы 1. Рассмотрим неоднородную систему

$$\partial^2 u / \partial x^2 = A_1 u + f_1(x, y),$$

$$\partial^2 u / \partial y^2 + F_x u = A_2 u + f_2(x, y) \qquad (15)$$

с начальными условиями

$$u(0, 0) = u_0; \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = u_1; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = u_2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0, 0) = u_3 \qquad (16)$$

где функции $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемы и вместе с первыми производными принимают значения в D_1. Условие совместности для системы (15), (16) имеет вид

$$A_1 f_2 - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = A_2 f_1 - \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} - F_x f_1 - f_1. \qquad (17)$$

Теорема 2. *При условии, что выполнены требования* 1), 2), 3), 4) *теоремы* 1 *и* (17), *задача* (15), (16) *имеет единственное решение вида*

$$u(x, y) = C(x, A_1) \cdot C(y, A_2) u_0 + C(x, A_1) \cdot S(y, A_2) u_2 + S(x, A_1) \cdot C(y, A_2) u_1 +$$
$$+ S(x, A_1) \cdot S(y, A_2) u_3 + C(x, A_1) \int_0^y S(y - \tau, A_2) f_2(0, \tau)\, d\tau +$$
$$+ S(x, A_1) \int_0^y S(y - \tau, A_2) \frac{\partial f_2}{\partial x}(0, \tau)\, d\tau + \int_0^x S(x - s, A_1) f_1(s, y)\, ds.$$

В доказательстве теоремы существенно используется тождество

$$F_x \int_0^x S(x-s,\ A)\cdot f(s,\ y)\,ds = \int_0^x S(x-s,\ A)\cdot F_s f(s,\ y)\,ds +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^x S(x-s,\ A)\cdot f(s,\ y)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^x (x-s)\,C(x-s,\ A)\cdot f(s,\ y)\,ds,$$

где $f(s,\ y)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Автор выражает глубокую признательность С. Г. Крейну за внимание и помощь в работе.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
23 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Левитан, Тр. симпозиума, посвященного 60-летию академика С. Л. Соболева, «Наука», 1970, стр. 150. [2] H. O. Fattorini, J. of Differential Equations, 6, № 1, 50 (1969). [3] С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», 1967. [4] С. Г. Крейн, А. М. Шихватов, Функциональный анализ, 4, в. 1, 52 (1970).