

А. К. ГУЩИН

**ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ II И III КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА
В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ
ОБЛАСТЯХ**

(Представлено академиком В. С. Владимировым 7 III 1972)

Пусть Ω — неограниченная область n -мерного ($n \geq 2$) пространства E_n , граница Γ которой состоит из конечного числа непересекающихся, замкнутых или неограниченных $(n-1)$ -мерных поверхностей Ляпунова и удовлетворяет следующему условию: существуют такие постоянные $\delta_0 > 0$ и $a_0 > 0$, что для любой точки $x_0 \in \Gamma$ пересечение шара $|x - x_0| < \delta_0$ с поверхностью Γ связно и $(v(x_1), v(x_2)) \geq a_0$ для $x_1 \in \Gamma$, $x_2 \in \Gamma$, $|x_1 - x_2| \leq \delta_0$, где $v(x)$ — вектор внешней (по отношению к Ω) единичной нормали к Γ .

Рассмотрим в цилиндре $D = \Omega \times (t > 0)$ решение следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = L[u] = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_i} + c(t, x) u(t, x) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial N} + q(t, x) u(t, x)|_{x \in \Gamma} = 0, \quad (2)$$

$$u(0, x) = \varphi(x). \quad (3)$$

Симметричная матрица $a_{ij}(t, x)$ удовлетворяет условию

$$0 < \gamma \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) y_i y_j \leq \gamma^{-1} \quad (4)$$

для любого единичного вектора $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Ограниченные коэффициенты $b_i(t, x)$ и $c(t, x)$ удовлетворяют неравенствам

$$c(t, x) \leq 0, \quad M \geq \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i(t, x)}{\partial x_i} - c(t, x) \geq 0, \\ -q(t, x) + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) v_i(x)|_{x \in \Gamma} \leq 0,$$

где постоянная $M > 0$; N — внешняя кономаль к Γ эллиптического оператора L , а $q(t, x)$ — непрерывная неотрицательная ограниченная функция. Начальную функцию $\varphi(x)$ считаем принадлежащей пространству $L_1(\Omega)$; под решением задачи (1) — (3) в этом случае понимаем (см. (')) предел решений с непрерывными финитными начальными функциями, приближающими $\varphi(x)$ в норме $L_1(\Omega)$.

Пусть Q — произвольное открытое подмножество области Ω . Рассмотрим функцию

$$l(v) = \inf_{\text{mes}_n Q = v} \text{mes}_{n-1} [\partial Q \cap \Omega],$$

где ∂Q — граница Q , а mes_k — k -мерная мера.

Пусть непрерывная положительная монотонно неубывающая функция $g(v)$, $v > 0$, удовлетворяет условию

а) существуют такие положительные постоянные ε_0 , $\varepsilon_0 \leq 1/n$, δ_1 и C , что при $v \leq \delta_1$ имеет место оценка

$$g(v) \geq Cv^{1-\varepsilon_0};$$

или более сильному условию

б) существует такая положительная постоянная ε_0 , $\varepsilon_0 \leq 1/n$, что функция $v^{1-\varepsilon_0}/g(v)$ монотонно не убывает.

Мы будем говорить, что область Ω принадлежит классу $\mathfrak{A}(g)$ ($g(v)$ удовлетворяет условию а)) если для всех $v > 0$ справедливо неравенство

$$l(v) \geq g(v). \quad (5)$$

Если коэффициенты уравнения (1) — достаточно гладкие функции ($a_{ij}(t, x)$ удовлетворяют условию Гёльдера по переменным t и x ; существуют производные $\partial a_{ij}(t, x)/\partial x_i$ и $\partial b_i(t, x)/\partial x_i$, они ограничены и вместе с коэффициентами $b_i(t, x)$, $c(t, x)$ удовлетворяют условию Гёльдера по переменным x), то справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\Omega \in \mathfrak{A}(g)$; тогда функция Грина $G(t, x; 0, \xi)$ задачи (1), (2) для всех $t > 0$ и $x, \xi \in \Omega$ удовлетворяет неравенству

$$G(t, x; 0, \xi) \leq 4/\mathcal{I}_{-1}(\gamma_1 t),$$

где функция $\mathcal{I}_{-1}(t)$ обратная к

$$\mathcal{I}(v) = \int_0^v \theta^{-1} \int_0^\theta \eta^{-1} \int_0^\eta \frac{\xi}{g^2(\xi)} d\xi d\eta d\theta,$$

а $\gamma_1 = \gamma(\ln^2 2)/32$.

Если функция $g(v)$ удовлетворяет условию б), то $\mathcal{I}_{-1}(\gamma_1 t) \geq 4\mathcal{F}_{-1}(\sqrt{t})/C_0$ и, следовательно,

$$G(t, x; 0, \xi) \leq C_0/\mathcal{F}_{-1}(\sqrt{t}), \quad (6)$$

где функция $\mathcal{F}_{-1}(t)$ обратная к

$$\mathcal{F}(v) = v/g(v), \quad (7)$$

а $C_0 = 4(8\varepsilon_0^3 \gamma_1)^{-1/(2\varepsilon_0)}$.

Следствие 1. Пусть $\Omega \in \mathfrak{A}(g)$; тогда решение $u(t, x)$ задачи (1), (2), (3) удовлетворяет неравенству

$$|u(t, x)| \leq 4\|\varphi\|_{L_1(\Omega)}/\mathcal{I}_{-1}(\gamma_1 t)$$

и, если выполнено условие б), неравенству

$$|u(t, x)| \leq C_0\|\varphi\|_{L_1(\Omega)}/\mathcal{F}_{-1}(\sqrt{t}). \quad (8)$$

Заметим, что теорема 1 позволяет получать оценки решения задачи (1), (2), (3) с начальной функцией $\varphi(x) \notin L_1(\Omega)$, но $\varphi(x) \in L_p(\Omega)$ при некотором $p > 1$. Так, если выполнено условие б), то

$$|u(t, x)| \leq \frac{C_0^{1/p} \|\varphi\|_{L_p(\Omega)}}{\mathcal{F}_{-1}^{1/p}(\sqrt{t})}.$$

Результат, аналогичный следствию 1 в случае менее полной «степенной» шкалы классов областей, был установлен в работе (1). В ней доказано, что если $\Omega \in \mathfrak{A}(\alpha, n)$, $1 \leq \alpha \leq n$, где

$$\mathfrak{A}(\alpha, n) = \bigcup_{d_0 > 0} \mathfrak{A}(d_0 \min \{v^{(\alpha-1)/\alpha}, v^{(n-1)/n}\}),$$

то справедлива оценка (8), в которой функция $\mathcal{F}_{-1}(\sqrt{t})$ будет равна $\text{const} \min \{t^{\alpha/2}, t^{n/2}\}$.

Утверждение теоремы получается из равномерной по $\xi \in \Omega$ оценки нормы $\|G(t, x; 0, \xi)\|_{L_2(\Omega)}$, доказательство которой опирается на следующее утверждение, аналогичное лемме 2 работы (1).

Л е м м а. Пусть $\Omega \in \mathfrak{A}(g)$; тогда для любой функции

$$f(x) \in W_2^1(\Omega) \cap L_1(\Omega)$$

имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx \geq \int_{\Omega} f^2(x) dx \left[C_1 \mathcal{P} \left(\left(2 \int_{\Omega} |f(x)| dx \right)^2 / \int_{\Omega} f^2(x) dx \right) \right]^{-1},$$

где

$$\mathcal{P}(v) = \int_0^v \xi^{-1} \int_0^{\xi} \frac{\theta}{g^2(\theta)} d\theta d\xi, \quad C_1 = \frac{32}{\ln^2 2}.$$

Пусть ξ — произвольная точка области Ω . Обозначим $\text{mes}_{n-1} \{(|x - \xi| = R) \cap \Omega\}$ через $s_{\xi}(R)$. Если $\Omega \in \mathfrak{A}(g)$ и функция $g(v)$ удовлетворяет условию б), то справедливо неравенство

$$s_{\xi}(R) \geq \varepsilon_0^{(1-\varepsilon_0)/\varepsilon_0} \mathcal{F}_{-1}(R) / R,$$

где ε_0 — постоянная из условия б).

Будем говорить, что область Ω принадлежит классу $\mathfrak{B}(g)$, где $g(v)$ удовлетворяет условию б), если $\Omega \in \mathfrak{A}(g)$ и существует $d = d(\xi)$ такая, что

$$s_{\xi}(R) \leq d \mathcal{F}_{-1}(R) / R \quad (9)$$

(функция $\mathcal{F}(v)$ определена равенством (7)). Предполагаем, что $d(\xi)$, непрерывна в $\bar{\Omega}$.

Заметим, что если $\Omega \in \mathfrak{B}(g)$, то для любой точки $\xi \in \Omega$ справедливы неравенства

$$\varepsilon_0^{1/\varepsilon_0} \mathcal{F}_{-1}(R) \leq v_{\xi}(R) = \text{mes}_n \{(|x - \xi| < R) \cap \Omega\} \leq d(\xi) \mathcal{F}_{-1}(R), \quad (10)$$

где ε_0 — постоянная из условия б). Кроме того,

$$\begin{aligned} g(v) &\leq l(v) \leq s_{\xi}(R_{\xi}(v)) \leq d(\xi) \frac{\mathcal{F}_{-1}(R_{\xi}(v))}{R_{\xi}(v)} = d(\xi) g(\mathcal{F}_{-1}(R_{\xi}(v))) \leq \\ &\leq d(\xi) g(\varepsilon_0^{-1/\varepsilon_0} v) \leq \varepsilon_0^{-(1-\varepsilon_0)/\varepsilon_0} d(\xi) g(v); \end{aligned}$$

Функция $R_{\xi}(v)$ обратная к монотонно возрастающей функции $v_{\xi}(R)$.

Следовательно, для принадлежности Ω из $\mathfrak{A}(g)$ классу $\mathfrak{B}(g)$ (функция $g(v)$ удовлетворяет условию б)) необходимо, чтобы оценка (5) была точной. **г. е.**

$$g(v) \leq l(v) \leq \text{const } g(v),$$

и величина $s_{\xi}(R_{\xi}(v))$ имела при каждом $\xi \in \Omega$ тот же порядок по v , что и функция $l(v)$:

$$l(v) \leq s_{\xi}(R_{\xi}(v)) \leq \text{const } l(v),$$

где постоянная зависит от ξ . Нетрудно видеть, что эти условия являются и достаточными.

Пусть начало координат принадлежит области Ω , тогда из неравенств (10) немедленно получаем

Следствие 2. Пусть $\Omega \in \mathfrak{B}(g)$; тогда неравенства (6) теоремы и (8) следствия 1 можно переписать в виде

$$G(t, x; 0, \xi) \leq C_0 d(0) / v(\sqrt{t}), \quad (11)$$

$$|u(t, x)| \leq C_0 d(0) \|\varphi\|_{L_1(\Omega)} / v(\sqrt{t}),$$

где $v(R) = v_0(R) = \text{mes}_n \{(|x| < R) \cap \Omega\}$.

Рассмотрим двумерную область Ω вида $x_2 > f(x_1)$, $f(0) = 0$, где гладкая четная функция $f(x_1)$ имеет монотонно неубывающую производную.

Тогда можно показать, что $\Omega \in \mathfrak{B} \left(\min \left\{ \sqrt{\frac{v}{\pi+4}}, \tilde{f}_{-1} \left(\frac{v}{\pi+4} \right) \right\} \right)$, где функция $\tilde{f}_{-1}(v)$ обратная к $\tilde{f}(x_1) = x_1 f(x_1)$. Оценка (11) в этом случае будет иметь вид

$$G(t, x; 0, \xi) \geq \text{const} \max \{t^{-1}, [\sqrt{t}, \tilde{f}_{-1}(\sqrt{t})]^{-1}\}.$$

Например, если $f(x_1)$ при $x_1 \rightarrow \infty$ эквивалентна функции $x_1^{\beta} \ln x_1$, $\beta \geq 1$, то функция $(\sqrt{t} \tilde{f}_{-1}(\sqrt{t}))^{-1}$ при больших t ведет себя как $t^{-(\beta+1)/2\beta} \ln^{1/\beta} t$; т. е. при больших t

$$G(t, x; 0, \xi) \leq \text{const } t^{-(\beta+1)/2\beta} \ln^{1/\beta} t.$$

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
21 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. К. Гуштин, Дифференциальные уравнения, 6, № 4, 741 (1970).