

Академик Н. Н. КРАСОВСКИЙ, А. И. СУББОТИН, В. Н. УШАКОВ

МИНИМАКСНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА

Рассматривается конфликтно управляемая система, движение которой описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v). \quad (1)$$

Здесь x — n -мерный фазовый вектор; u и v — управляющие векторы первого и второго игроков, удовлетворяющие ограничениям $u \in P$, $v \in Q$, где P и Q — некоторые компакты; $f(t, x, u, v)$ — непрерывная функция, липшицева по x в каждой ограниченной области. Предполагается, что движения системы продолжимы на любой конечный промежуток времени.

В пространстве $\{p = (t, x)\}$ заданы замкнутые множества M и N . Исследуется задача наведения, стоящая перед первым игроком: используя информацию о реализующейся позиции $(t, x[t])$, первый игрок должен выбирать такое управление $u[t]$, чтобы, не нарушая фазового ограничения $(t, x[t]) \in N$, привести точку $(t, x[t])$ на множество M . Поведение противника стеснено лишь ограничением $v[t] \in Q$, и не исключаются случаи, когда выбор управления $v[t]$ опирается и на информацию о реализующемся управлении $u[t]$.

Таково содержание задачи, к которой сводится исследование многих дифференциальных игр ⁽¹⁻⁸⁾. Ниже приведена ее математическая формализация, полностью отражающая указанное содержание. Показано, что задача наведения неразрешима в предлагаемой системе определений, не может иметь решения при любом позиционном способе формирования управления u . Исследование условий разрешимости задачи наведения содержит элементы конструктивного решения. Отметим еще, что ниже не предполагается выполнение условия

$$\min_{v \in Q} \max_{u \in P} s' f(t, x, u, v) = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} s' f(t, x, u, v)$$

(s — n -мерный вектор, штрих означает транспонирование), при котором типичные дифференциальные игры обладают ситуациями равновесия в классе чистых позиционных стратегий. Итак, математическая постановка задачи такова.

Стратегией первого игрока U назовем функцию $u = u(t, x)$, определенную при всех $(t, x) \in R^{n+1}$ и удовлетворяющую условию $u(t, x) \in P$. Совокупность стратегий U обозначим символом $\mathcal{U}$.

Аппроксимационным движением $x[t] = x[t, t_*, x_*, U, \Gamma]$ назовем абсолютно непрерывную функцию $x[t]$, $t \geq t_*$, $x[t_*] = x_*$, которая при почти всех $t \geq t_*$ удовлетворяет соотношениям

$$\dot{x}[t] \in \text{co} \{f(t, x[t], u(\tau_i, x[\tau_i]), v) : v \in Q\}, \tau_i \leq t < \tau_{i+1}, i = 0, 1, \dots$$

Здесь (t_*, x_*) — начальное условие для рассматриваемого движения; $u = u(t, x)$ — стратегия $U \in \mathcal{U}$, порождающая движение; Γ — совокупность полуинтервалов $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots$, $\tau_0 = t_*$, покрывающих полуось $[t_*, \infty)$; символ $\text{co} \{f\}$ означает выпуклую оболочку множества $\{f\}$.

Функцию $x[t] = x[t, t_*, x_*, U]$ назовем движением, порожденным стратегией $U \in \mathcal{U}$, если существует последовательность аппроксимацион-

ных движений $x_k[t] = x[t, t_*, x_k, U, \Gamma_k]$, $k = 1, 2, \dots$, которая удовлетворяет условиям

$$x_k \rightarrow x_*, \quad \Delta(\Gamma_k) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty \quad (2)$$

и равномерно на любом конечном промежутке времени $[t_*, T]$ сходится к функции $x[t]$. Здесь $\Delta(\Gamma) = \sup_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$.

Будем говорить, что из начальной позиции (t_*, x_*) стратегия $U_* \in U$ гарантирует наведение к моменту $t = T$, если для любого движения $x[t] = x[t, t_*, x_*, U]$ выполняются соотношения $\vartheta(x[\cdot], M) \leq T, (t, x[t]) \in N$ при $t_* \leq t \leq \vartheta(x[\cdot], M)$, где $\vartheta(x[\cdot], M)$ — значение t при котором впервые осуществляется включение $(t, x[t]) \in M$.

Задача наведения. Пусть заданы начальная позиция игры (t_0, x_0) и некоторое число $T \geq t_0$. Требуется найти стратегию $U_* \in U$, которая из позиции (t_0, x_0) гарантирует наведение к моменту T .

Введем некоторые вспомогательные понятия.

Контрстратегией V назовем всякую функцию $v = v(t, x, u) \in Q, (t, x) \in R^{n+1}, u \in P$. Совокупность контрстратегий V обозначим символом V^* .

Аппроксимационным движением $x[t] = x[t, t_*, x_*, V, \Gamma]$, $x[t_*] = x_*$ назовем абсолютно непрерывную функцию $x[t]$, удовлетворяющую при почти всех $t \geq t_*$ включениям

$$\dot{x}[t] \in \text{co} \{f(t, x[t], u, v(\tau_i, x[\tau_i], u)) : u \in P\}, \quad \tau_i \leq t < \tau_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Здесь $v = v(t, x, u)$ — контрстратегия V .

Движением, порожденным контрстратегией $V \in V$, назовем равномерный на любом конечном отрезке времени предел последовательности аппроксимационных движений $x_k[t] = x[t, t_*, x_k, V, \Gamma_k]$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющей соотношениям (2).

Будем говорить, что из позиции (t_*, x_*) контрстратегия $V_* \in V^*$ гарантирует уклонение на отрезке времени $[t_*, T]$, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого движения $x[t] = x[t, t_*, x_*, V]$ выполняется соотношение

$$(t, x[t]) \notin M_\varepsilon \quad \text{при} \quad t_* \leq t \leq \min \{T, \tau(x[\cdot], N_\varepsilon)\};$$

здесь символ G_ε означает ε -окрестность множества G ; $\tau(x[\cdot], N_\varepsilon)$ — значение параметра t , при котором впервые расстояние от точки $(t, x[t])$ до множества N становится равным числу ε .

Теорема 1. Пусть (t_0, x_0) — исходная позиция игры, T — некоторое число, $t_0 \leq T < \infty$. Справедливо одно из следующих двух положений: либо существует стратегия $U_* \in U$, которая из позиции (t_0, x_0) гарантирует наведение к моменту T ; либо существует контрстратегия $V_* \in V^*$, которая из позиции (t_0, x_0) гарантирует уклонение на отрезке времени $[t_0, T]$.

Доказательство теоремы состоит в построении экстремальной стратегии $U_* \in U$, гарантирующей наведение к моменту T из любой позиции (t_0, x_0) , для которой отсутствуют контрстратегии уклонения. Опишем основные элементы экстремальной конструкции⁽⁵⁻⁸⁾, модифицированной для рассматриваемого здесь случая.

Пусть задана некоторая система замкнутых множеств $W(t) \in R^n$. Будем говорить, что на отрезке (t_0, η) система множеств $W(t)$ обладает свойством минимаксной u -стабильности относительно M , если $W(t) = \phi$ при $t_0 \leq t \leq \eta$ и, каковы бы ни были контрстратегия $V \in V^*$, числа $t_* \in [t_0, \eta]$, $\delta \in [0, \eta - t_*]$ и точка $x_* \in W(t_*)$, существует движение $x[t] = x[t, t_*, x_*, V]$, удовлетворяющее одному из следующих двух условий:

$$x[t_* + \delta] \in W(t_* + \delta), \quad \{(t, x[t]) : t \in [t_*, t_* + \delta]\} \cap M \neq \phi.$$

Функцию $u_e = u_e[t, x]$ назовем стратегией U_e , экстремальной к системе замкнутых множеств $W(t)$, $-\infty < t < \infty$, если при всех $(t, x) \in R^{n+1}$ выполняется условие

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} (x - w^0(x))' f(t, x, u, v) = \max_{v \in Q} (x - w^0(x))' f(t, x, u_e(t, x), v),$$

где точка $w^0(x)$ принадлежит совокупности ближайших к x точек множества $W(t)$; если $W(t) = \emptyset$, то полагаем $x - w^0(x) = 0$.

Лемма 1. Пусть система замкнутых множеств $W(t)$ на отрезке $[t_0, \eta]$ обладает свойством минимаксной u -стабильности относительно M , U_e — стратегия, экстремальная к этой системе, и пусть $x_0 \in W(t_0)$.

Тогда для любого движения $x[t] = x[t, t_0, x_0, U_e]$ будет справедливо включение

$$x[t] \in W(t) \text{ при } t_0 \leq t \leq \min \{ \eta, \vartheta(x[\cdot], M) \}.$$

Справедливость леммы 1 устанавливается оценками, которые аналогичны приведенным в работе ⁽⁵⁾, см. стр. 1011—1014.

Множеством минимаксного поглощения $W(t_*, T; M, N)$ назовем совокупность всех точек $x_* \in R^n$ таких, что, какова бы ни была контрстратегия $V \in V^*$, существует движение $x[t] = x[t, t_*, x_*, V]$, удовлетворяющее соотношениям

$$\vartheta(x[\cdot], M) \leq T, \quad (t, x[t]) \in N \quad \text{при} \quad t_* \leq t \leq \vartheta(x[\cdot], M). \quad (3)$$

Лемма 2. Если $x_0 \in W(t_0, T; M, N)$, то стратегия U_e , экстремальная к системе множеств минимаксного поглощения, гарантирует наведение из позиции $[t_0, x_0]$ к моменту T .

Справедливость леммы 2 устанавливается с помощью леммы 1, при этом используются некоторые свойства множеств $W(t, T; M, N)$, в частности, важное свойство минимаксной u -стабильности. Далее из определения множеств $W(t, T; M, N)$ и из леммы 2 вытекает справедливость теоремы 1.

Предлагаемая формализация игровой задачи наведения физически реализуется достаточно простыми аппроксимирующими конструкциями. Например, возможна следующая содержательная трактовка теоремы 1.

Пусть (t_0, x_0) — исходная позиция, T — некоторое конечное число, $T \geq t_0$. Тогда либо для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любого движения $x[t]$, $x[t_0] = x_0$, $t \geq t_0$, удовлетворяющего уравнению

$$\dot{x}[t] = f(t, x[t], u_e(\tau_i, x[\tau_i]), v[t]), \quad \tau_i \leq t < \tau_{i+1}, \\ i = 0, 1, \dots,$$

будут выполняться соотношения $\vartheta(x[\cdot], M_\varepsilon) \leq T$, $(t, x[t]) \in N$ при $t_0 \leq t \leq \vartheta(x[\cdot], M_\varepsilon)$. Здесь $u_e(t, x)$ — стратегия, экстремальная к системе множеств $W(t, T; M, N)$, $v[t] \in Q$ — произвольная измеримая реализация, покрытие $\Gamma = \{(\tau_i, \tau_{i+1}): i = 0, 1, \dots\}$ удовлетворяет условию $\Delta(\Gamma) \leq \delta$. Либо существует число $\varepsilon > 0$, контрстратегия $V_* \in V^*$ и числа $\delta > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что для всякого движения $x[t]$, $x[t_0] = x_0$, $t \geq t_0$, удовлетворяющего уравнению

$$\dot{x}[t] = f(t, x[t], u[t], v_*(\tau_i, x[\tau_i], u[\tau_j^{(u)}])), \\ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \cap [\tau_j^{(u)}, \tau_{j+1}^{(u)}], \quad i, j = 0, 1, \dots,$$

будет выполняться соотношение $(t, x[t]) \notin M_\varepsilon$ при $t_* \leq t \leq \min \{T, \tau(x[\cdot], N_\varepsilon)\}$. Здесь $u[t] \in P$ — произвольное кусочно непрерывное управление; $\Delta(\Gamma) \leq \delta$; второе покрытие $\Gamma^{(u)} = \{[\tau_j^{(u)}, \tau_{j+1}^{(u)}]: j = 0, 1, \dots\}$ реализуется по ходу дела из условия $\|u[t_*] - u[t_{**}]\| \leq \gamma$ при $t^*, t^{**} \in [\tau_j^{(u)}, \tau_{j+1}^{(u)}]$.

Итак, задача наведения разрешима тогда и только тогда, когда $x_0 \in W(t_0, T; M, N)$. Основной этап решения составляет построение множества $W(t, T; M, N)$. Однако если исходить непосредственно из определения этого множества, то построение $W(t, T; M, N)$ потребует перебора всех контрстратегий $V \in V^*$ и проверки для них соотношений (3), что, вообще говоря, вряд ли реализуемо. Поэтому представляет интерес тот случай, когда построение множеств $W(t, T; M, N)$ сводится к перебору более узкого класса контрстратегий. Обозначим через V_1^* класс программных контрстратегий, заданных функциями $v = v(t, u)$, не зависящими от x .

Множеством минимаксного программного поглощения $W_1(t, T; M, N)$ назовем совокупность всех точек $x_* \in R^n$ таких, что, какова бы ни была контрстратегия $V \in V_1^*$, существует движение $x[t] = x[t, t_*, x_*, V]$, удовлетворяющее соотношениям (3).

Поскольку $V_1^* \subset V^*$, то справедливо включение $W(t, T; M, N) \subset W_1(t, T; M, N)$. Известны, однако, регулярные случаи программного поглощения (^{7, 8}), когда выполняется равенство $W(t, T; M, N) = W_1(t, T; M, N)$, и, следовательно, построение множеств $W(t, T; M, N)$ в таких случаях можно довести до эффективно реализуемых алгоритмов, так как соотношения, определяющие ситуацию программного поглощения, подчас являются сравнительно простыми.

В общем случае построение множеств $W(t, T; M, N)$ можно свести к рекуррентной процедуре, основу которой составляет локальная операция программного минимаксного поглощения. Пусть $\tau_i^{(k)} = t_0 + i \cdot \delta_k$; $i = 0, 1, \dots, l = 2^k$; $\delta_k = (T - t_0) \cdot 2^{-k}$; $k = 1, 2, \dots$. Обозначим через $W_i^{(k)}$, $i = 0, 1, \dots, l - 1 = 2^k - 1$; $k = 1, 2, \dots$, множества в R^n , определенные рекуррентными соотношениями

$$W_{l-1}^{(k)} = W_1(\tau_{l-1}^{(k)}, T; M, N), \quad l = 2^k, \quad (4)$$

$$W_{i-1}^{(k)} = W_1(\tau_{i-1}^{(k)}, \tau_i^{(k)}; M \cup \widetilde{W}_i^{(k)}, N), \quad i = 1, 2, \dots, l - 1,$$

где $\widetilde{W}_i^{(k)} = \{(t, x) : t = \tau_i^{(k)}, x \in W_i^{(k)}\}$. Для точки $t \in [t_0, T]$ обозначим через $i(t, k)$ наименьшее значение параметра i , при котором выполняется неравенство $\tau_i^{(k)} > t$. Множество $W^*(t, T; M, N)$ определим как совокупность точек $x_* \in R^n$, для которых существуют последовательности x_k , $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие условиям $x_k \rightarrow x_*$ при $k \rightarrow \infty$, $x_k \in W_{i(t,k)}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$. Данная процедура сходна с конструкциями из работ (¹⁻³). Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Множества $W(t, T; M, N)$ и $W^*(t, T; M, N)$ при $t_0 \leq t \leq T$ совпадают.

Отметим, что в соотношениях (4) полуинтервалы $[\tau_i^{(k)}, \tau_{i+1}^{(k)})$ малы, поэтому здесь допустимы некоторые огрубления, в частности, построения, основанные на кусочно-разностном аналоге уравнения (1).

Институт математики и механики
Уральского научного центра Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
30 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. С. Понтрягин, ДАН, 175, № 4, 764 (1967). ² Б. Н. Пшеничный, ДАН, 184, № 2, 285 (1969). ³ Р. П. Федоренко, Журн. вычислит. матем. и матем. физики, 9, № 5, 1036 (1969). ⁴ P. Varaija, J. Lin, SIAM J. Control., 7, № 1, 141 (1969). ⁵ Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, ПММ, 4, № 6, 1005 (1970). ⁶ Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, ПММ, 5, № 1, 110 (1971). ⁷ Н. Н. Красовский, ПММ, 35, № 6, 945 (1971). ⁸ Н. Н. Красовский, ДАН, 205, № 3 (1972).