Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 2

УДК 513.88:517.948.35 *МАТЕМАТИКА*

Е. А. ЛАРИОНОВ

О БАЗИСАХ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 4 V 1971)

Ряд задач математической физики приводит ([1-6]) к изучению в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ уравнения

$$y = \mu G y + \frac{1}{\mu} H y, \tag{1}$$

где G, H — вполне непрерывные самосопряженные операторы в $\mathfrak{H}$, μ — комплексный параметр. С уравнением (1) ассоциируется пучок

$$Q(\mu) = I - \mu G y - \frac{1}{\mu} H y. \tag{2}$$

Понятие спектра $\sigma(G)$, собственных и присоединенных векторов (с.п.в.) пучка (2) вводится обычным образом.

В ([1-6]) при различных предположениях относительно G и H доказана полнота или двукратная полнота с.п.в. пучка (2). В ([7]) анонсирована двукратная полнота с.п.в. пучка (2).

Весьма существенным для приложений является вопрос о существовании базисов в $\mathfrak{H}$, составленных из с.п.в. пучка (2). В самом деле, в то время как двукратная полнота с.п.в. (2) означает, что для соответствующего дифференциального уравнения найдется решение $x(t)$ с начальными значениями $x(0)$, $x'(0)$, сколь угодно близкими к любым наперед заданным, существование в $\mathfrak{H}$ базиса из с.п.в. пучка (2) означает, что для любых x_0, x_0' соответствующее уравнение имеет решение $x(t)$ такое, что $x(0) = x_0$. $x'(0) = x_0'$. В силу сказанного существование базиса из с.п.в. пучка $Q(\mu)$ оказывается ([1, 8]) естественно связанным с устойчивостью того процесса, которому в соответствующем гильбертовом пространстве сопоставляется уравнение (1) и пучок (2).

Мы покажем существование двух базисов Рисса в $\mathfrak{H}$, составленных из с.п.в. специального вида пучка $Q(\mu)$.

Пусть R — кольцо всех линейных ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$, γ_∞ — совокупность всех вполне непрерывных операторов из R. Для приложений важно знать, как расположен спектр $\sigma(Q)$. В ([4]) установлено, что невещественные собственные числа пучка $Q(\mu)$ при $G > 0$, $H \geqslant 0$, $G, H \in \gamma_\infty$ могут располагаться лишь в полукольце

$$\frac{1}{2\|G\|} \leqslant |\mu| \leqslant 2\|H\|. \tag{3}$$

Умножив (1) на элемент y, $\|y\| = 1$, получим

$$\mu^2 (Gy, y) - \mu + (Hy, y) = 0.$$

Положим при $(Gy, y) \neq 0$

$$\mu + (y) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4(Gy, y)(Hy, y)}}{2(Gy, y)}, \tag{4}$$

$$\mu_-(y) = \frac{2(Hy, y)}{1 + \sqrt{1 - 4(Gy, y)(Hy, y)}}. \tag{5}$$

Пусть $Q(\mu_0)y_0 = 0$. Элемент $y_0 \in \mathfrak{H}$ называется собственным вектором первого рода, нейтральным или второго рода, если соответственно

$$|\mu_0|^2 > \frac{(Hy_0, y_0)}{(Gy_0, y_0)}, \quad |\mu_0|^2 = \frac{(Hy_0, y_0)}{(Gy_0, y_0)}, \quad |\mu_0|^2 < \frac{(Hy_0, y_0)}{(Gy_0, y_0)}.$$

При $\mu_0 \neq \bar{\mu}_0$ $|\mu_0|^2 = \dfrac{(Hy_0, y_0)}{(Gy_0, y_0)}$, так как $|\mu_0|^2 = \mu_+(y_0)\overline{\mu_+(y_0)}$, а $\overline{\mu_+(y_0)} = \mu_-(y_0)$. Для вектора y_0 (Z_0) первого (второго) рода $\mu_0 = \mu_+(y_0) > \mu_-(y_0)$ ($\mu_-(Z_0) < \mu_+(Z_0)$). Если числу $\mu_0 \in \sigma(Q)$ отвечают собственные векторы только первого (второго) рода или только нейтральные собственные векторы, то μ_0 называется собственным числом первого (второго) рода или нейтральным собственным числом. Соответствующие совокупности обозначим S_1, S_2 и N. Множество $\mu \in N \cap \sigma(Q)$ с $\operatorname{Im}\mu > 0$ ($\operatorname{Im}\mu < 0$) обозначим Λ_1 (Λ_2). Совокупность всех вещественных нейтральных собственных чисел обозначим P. Через те же буквы с волной сверху обозначим отвечающие этим множествам совокупности корневых векторов пучка $Q(\mu)$.

Двукратная полнота с.п.в. изучается путем сведения $Q(\mu)$ к линейному пучку в $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$.

Преобразование Г. И. Лаптева сводит $Q(\mu)$ к пучку

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -G+H \\ G-H & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\lambda = \mu + 1/\mu$.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$y = \frac{i\mu}{\alpha}(-i\alpha G)\,y + \frac{1}{i\mu/\alpha}\frac{iH}{\alpha}, \quad \pm\alpha \notin \sigma(Q), \quad \alpha = \bar{\alpha}. \tag{7}$$

Пучок $L(\lambda)$ примет форму

$$L(\tilde{\lambda}) = \begin{pmatrix} I & -i(\alpha G + H/\alpha) \\ i(\alpha G + H/\alpha) & I \end{pmatrix} - \tilde{\lambda}\begin{pmatrix} -G & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}, \ \tilde{\lambda} = \tilde{\mu} + 1/\mu,\ \tilde{\mu} = i\mu/\alpha. \tag{8}$$

Оператор $W = \begin{pmatrix} I & -i(\alpha G + H/\alpha) \\ i(\alpha G + H/\alpha) & I \end{pmatrix}$ самосопряжен в $\mathfrak{H}_0$ и в силу $G, H \in \gamma_\infty$ может иметь лишь конечное число отрицательных собственных значений. Из $\pm\alpha \notin \sigma(Q)$ следует, что обратный к W оператор W^{-1} существует и ограничен.

Оператор $\tilde{A} = W^{-1}A \in \gamma_\infty$, $A = \begin{pmatrix} -G & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$, и самосопряжен относительно формы $[\hat{x}, \hat{y}] = (W\hat{x}, \hat{y})$, $\hat{x}, \hat{y} \in \mathfrak{H}_0$. Квадратичная форма $[\hat{x}, \hat{x}]$ может иметь лишь конечное число отрицательных квадратов, а потому $\mathfrak{H}_0$, снабженное помимо обычного скалярного произведения $(\hat{x}, \hat{y})$ индефинитным скалярным произведением $[\hat{x}, \hat{y}]$, есть пространство Понтрягина.

Лемма 1. *Если $G = G^*$, $H = H^*$, $G, H \in \gamma_\infty$, G и H — полные в $\mathfrak{H}$ операторы, то система с.п.в. $Q(\mu)$ двукратно полна в $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. По теореме из [11] W — самосопряженный в пространстве Понтрягина полный вполне непрерывный оператор $\tilde{A}$ имеет полную в $\mathfrak{H}_0$ с.с.п.в., причем из них сразу составляется [10] базис Рисса в $\mathfrak{H}_0$. Полнота с.с.п.в. $\tilde{A}$ в $\mathfrak{H}_0$ влечет утверждение леммы 2.

Теорема 1. *При условиях леммы 2 в пространстве $\mathfrak{H}$ существует базис Рисса из собственных векторов первого (второго) рода пучка $Q(\mu)$ и части его нейтральных корневых векторов.*

Доказательство. Умножив $L(\lambda)$ слева на оператор $J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, получим самосопряженный пучок

$$L_1(\lambda) = JL(\lambda) = \begin{pmatrix} I & G-H \\ G-H & -I \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & -H \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Оператор $A_0 = W^{-1}A_1$, где $A_1 = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & -H \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} I & G-H \\ G-H & -I \end{pmatrix}$, самосопряжен относительно оператора W. Непосредственно проверяется, что $W^{-1} \in R$, а потому $A_0 \in \gamma_\infty$. В силу леммы 1 с.с.п.в. оператора A_0 полна в $\mathfrak{H}_0$. Пусть $\tilde{\mathscr{L}}$ $(\mathscr{L})$ — замкнутая линейная оболочка всех собственных векторов $\tilde{A}$ (A_0). Из построения пучков $L(\tilde{\lambda})$ и $L_1(\lambda)$ имеем, что любому собственному вектору $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ x/\mu \end{pmatrix}$ оператора $\tilde{A}$ отвечает собственный вектор $\hat{x} = S_\alpha \tilde{x}$ оператора A_0, где $S_\alpha = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I\ i/\alpha \end{pmatrix}$.

Поскольку система собственных векторов $\tilde{A}$ образует базис Рисса в $\tilde{\mathscr{L}}$, то и система собственных векторов A_0 образует базис Рисса в $\mathscr{L}$. Коразмерность $\mathscr{L}$ в $\mathfrak{H}_0$ конечна, а потому система с.п.в. A_0 образует базис Рисса в $\mathfrak{H}_0$.

Собственный вектор $\hat{y}_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0/\mu_0 \end{pmatrix}$ оператора A_0 назовем первого (второго) рода или нейтральным в зависимости от принадлежности μ_0 к S_1 (S_2) или N.

Легко показать, что собственным векторам первого (второго) рода $Q(\mu)$ отвечают W-положительные (W-отрицательные) собственные векторы A_0, а нейтральным собственным векторам $Q(\mu)$ — W-нейтральные собственные векторы A_0.

Пусть $\mathscr{F}_1^0$ $(\mathscr{F}_2^0)$ — замкнутая линейная оболочка всех W-положительных (W-отрицательных) собственных векторов A_0. В силу того, что система с.п.в. образует базис Рисса, подпространство $\mathfrak{H}_0^1 = \mathscr{F}_1^0 \oplus \mathscr{F}_2^0$ замкнуто. Пусть $\mathfrak{H}_0^2$ есть W-ортогональное дополнение к $\mathfrak{H}_0^1$ в $\mathfrak{H}_0$. По построению $\dim \mathfrak{H}_0^2 < \infty$. В $\mathfrak{H}_0^2$ существует [12] инвариантное относительно A_0 максимальное в $\mathfrak{H}_0^2$ W-неотрицательное (W-неположительное) подпространство Q_1^0 (Q_2^0).

Подпространство $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_1^0 \oplus Q_1^0$ $(\mathscr{F}_2 = \mathscr{F}_2^0 \oplus Q_2^0)$ является в силу равенства $\mathfrak{H}_0^1 = \mathscr{F}_1^0 \oplus \mathscr{F}_2^0$ и максимальности Q_1^0 (Q_2^0), максимальным W-неотрицательным (W-неположительным).

Для всех $\hat{y} \in \mathfrak{H}_+ \equiv \mathfrak{H}$ имеем, что $(W\hat{y}, \hat{y}) = (Wy, y) = (y, y)$, так что подпространство $\mathfrak{H}_+$ является равномерно W-положительным в $\mathfrak{H}_0$. Для второй компоненты y / μ вектора $\hat{y} = \begin{pmatrix} y \\ y/\mu \end{pmatrix}$ получим, что $(Wy / \mu, y / \mu) = -(y, y) / \mu < 0$. Поскольку $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$, то подпространство $\mathfrak{H}$, рассматриваемое как первая (вторая) компонента $\mathfrak{H}_0$ является W-равномерноположительным (отрицательным), а потому существует W-проектор F_1 $(F_2) \in R$, отображающий гомеоморфно $\mathscr{F}_1$ $(\mathscr{F}_2)$ на $\mathfrak{H}$.

В $\mathscr{F}_1$ $(\mathscr{F}_2)$ существует базис Рисса из собственных векторов первого (второго) рода A_0 и части его нейтральных корневых векторов. При гомеоморфном отображении $\mathscr{F}_1$ $(\mathscr{F}_2)$ на $\mathfrak{H}$ этот базис переходит в базис Рисса в $\mathfrak{H}$, составленный из всех собственных векторов первого (второго) рода пучка $Q(\mu)$ и части его нейтральных корневых векторов.

При $G > 0$ $Q(\mu)$ сводится [9] к квадратичному пучку. С помощью этого сведения доказывается

Теорема 2. *Если $G > 0$, $G \in \gamma\,\infty$, $H = H^* \in R$, то из с.п.в. $Q(\mu)$, отвечающих его собственным числам, лежащим на полуоси $\left[\frac{1}{2\|G\|}, \infty\right)$ и в верхней (нижней) части Γ_1, составляется базис Рисса $\mathfrak{H}$.*

Интересными для приложений являются условия существования разбиения $\sigma(Q)$ на два непересекающихся подмножества M_1 и M_2, $S_1 \cup \Lambda_1 \subset M_1$, $S_2 \cup \Lambda_2 \subset M_2$, которым соответствуют минимальные в $\mathfrak{H}$ системы $\tilde{M}_1$ $\tilde{M}_2$ с.п.в. $Q(\mu)$. Если $P = \phi$, то при условиях теоремы 1 $M_1 = S_1 \cup \Lambda_1$, $M_2 = S_2 \cup \Lambda_2$ и $\tilde{M}_1 = \tilde{S}_1 \cup \Lambda_1$, $\tilde{M}_2 = \tilde{S}_2 \cup \Lambda_2$. При $P \neq \phi$ $\sigma(Q)$ не всегда допускает разбиения на M_1 и M_2 с $M_1 \cap M_2 = \phi$. Основой для выяснения условий указанного разбиения служат следующие свойства $Q(\mu)$.

Свойство I. Длина цепочки из собственного и присоединенных векторов пучка $Q(\mu)$, отвечающей $\mu \in P$, равна двум.

Свойство II. Корневой линеал $\hat{N}(\lambda_0)$, $\lambda_0 = \mu_0 + 1 / \mu_0$, $\mu_0 \in P$, оператора A_0 четномерен.

Свойство III. Если $\mu_0 \in P$ отвечает общий для G и H собственный вектор y_0, то присоединенный к y_0 вектор y_1 суть собственный вектор $Q(\mu)$.

Свойство IV. Если $G > 0$, $H = H^*$, G, $H \in \gamma_\infty$, то $\sigma(Q) = S_1 \cup \cup S_2 \cup N$.

Свойство V. При $G > 0$ спектр первого рода S_1 пучка $Q(\mu)$ отделен от его спектра второго рода S_2.

На основе свойств I — V доказывается

Теорема 3. *Пусть $G > 0$, G, $H \in \gamma_\infty$, $H = H^*$ — полный оператор в $\mathfrak{H}$. Для существования двух непересекающихся подмножеств M_1 и M_2 спектра $\sigma(Q)$, $S_1 \cup \Lambda_1 \subset M_1$, $S_2 \cup \Lambda_2 \subset M_2$, которым соответствуют базисы Рисса $\mathfrak{H}$, необходимо и достаточно*:

1) *чтобы числам $\mu_0 \in P$ не отвечали общие собственные векторы G и H;*

2) *чтобы существовало разбиение чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_F \in P$ на две группы с одинаковой суммой их кратностей.*

В том случае, когда H не является полным, утверждения теорем 1 и 3 видоизменяются — при условиях этих теорем речь идет о базисах Рисса пространства $\mathfrak{H}$ и подпространства $\mathfrak{H}_1 = P\mathfrak{H}$, где P — ортопроектор на область значений оператора H.

Выражаю искреннюю благодарность Р. С. Исмагилову, А. Г. Костюченко и В. Б. Лидскому за ценные замечания и обсуждение результатов.

Всесоюзный заочный
инженерно-строительный институт
Москва

Поступило
26 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Chanrasekhar, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford, 1961. [2] Н. Г. Аскеров, С. Г. Крейн, Г. И. Лаптев, ДАН, 155, № 3, 499 (1964). [3] С. Г. Крейн, ДАН, 159, № 2, 262 (1964). [4] Н. Г. Аскеров, С. Г. Крейн, Г. И. Лаптев, Функц. анализ, 2, в. 2 (1968). [5] R. E. L. Turner, J. Math. An. Appl., 17, 151 (1967). [6] M. Shinbrot, Proc. Amer. Math. Soc., 14, 552 (1963). [7] Е. З. Могульский, ДАН, 183, № 4, 775 (1968). [8] Дж. Э. Аллахвердиев, Докторская диссертация, М., 1968. [9] М. Г. Крейн, Г. К. Лаптев, Труды Международн. симпозиума по применению теории функций в механике сплошной среды, «Наука», 1965. [10] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., 1965. [11] И. С. Иохвидов, ДАН, 71, № 2, 225 (1950). [12] Л. С. Понтрягин, Изв. АН СССР, сер. матем., 8, 243 (1944).