Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 3

УДК 513.88:513.83+517.948.3/5 *МАТЕМАТИКА*

Л. Г. ЛАБСКЕР

О СИЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 21 II 1972)

В заметке формулируются некоторые условия на подпространство вещественного банахова пространства с конусом, обеспечивающие сильную сходимость на всем пространстве последовательностей линейных положительных операторов, сильно сходящихся на указанном подпространстве. Приведенные теоремы позволяют сформулировать ряд предложений о сильной сходимости обобщенно монотонных последовательностей линейных (не обязательно положительных) операторов. Полученные результаты основываются на теоремах из ([13]) и примыкают к исследованиям ([1], [2]) по этому вопросу, изучение которого для пространства непрерывных на отрезке функций с конусом неотрицательных функций было начато П. П. Коровкиным в 1953 г. ([3], [4]) и продолжено его учениками в ([5–8]). Для пространств функций, непрерывных на конечномерном компакте, этот вопрос изучался в ([9], [10]) *.

1. Пусть E — вещественное пространство Банаха с нормой $\|\cdot\|$, K — конус в E ([11], [12]), E_0 — подпространство в E, E^* — сопряженное пространство, K^* — множество функционалов из E^*, принимающих на K неотрицательные значения. Говорят ([1], [2]), что функционал $f \in E^*$ проходит через точку $x_0 \in E$, если f принадлежит аннулятору $\{x_0\}^\perp = \{f \in E^* \mid f(x_0) = 0\}$ одноэлементного множества $\{x_0\}$. Через $\overset{[m]}{K}$ ($m \geqslant 0$ целое) обозначим множество ненулевых точек конуса K, через каждую из которых проходят лишь m линейно независимых функционалов из K^* ([13]).

В дальнейшем, если не оговорено специально, считаем $m \geqslant 1$.

Пусть $x_0 \in \overset{[m]}{K}$. Систему точек $\{x_i\}_1^m \subset E$ такую, что для каждой линейно независимой системы функционалов $\{f^{(i)}\}_1^m \subset K^* \cap \{x_0\}^\perp$ определитель

$$\begin{vmatrix} f^{(1)}(x_1) \ldots f^{(m)}(x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(1)}(x_m) \ldots f^{(m)}(x_m) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1}$$

назовем x_0-*системой*. Для того чтобы система $\{x_i\}_1^m \subset E$ была x_0-системой ($x_0 \in \overset{[m]}{K}$), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию (1) для одной какой-нибудь линейно независимой системы $\{f^{(i)}\}_1^m \subset K^* \cap \{x_0\}^\perp$.

Будем говорить, что подпространство E_0 *обладает свойством* $L(\overset{[m]}{K})$, если оно для каждой точки $x_0 \in \overset{[m]}{K} \cap E_0$ содержит x_0-систему. Если к тому же (в случае телесного конуса K ([12])) хотя бы одна точка этой x_0-системы является внутренней для конуса K, то скажем, что подпростран-

* Когда эта статья была сдана в печать, автору, благодаря любезному сообщению А. М. Рубинова, стала известна работа С. С. Кутателадзе и А. М. Рубинова «Супремальные генераторы и сходимость последовательностей операторов», «Оптимизация», вып. 3(20), 120 (1971), в которой указан новый подход к изучению такого рода сходимостных явлений, основанный на понятии супремального генератора частично упорядоченного пространства.

ство E_0 обладает усиленным свойством $L(\overset{[m]}{K})$. Размерность подпространства, обладающего свойством $L(\overset{[m]}{K})$, не меньше $m+1$ ([13]).

2. Определим на E полунорму

$$\|x\|^{(m)} = \sup\{|f(x)|\,|\,f \in F(E_0;\ \overset{[m]}{K})\}, \quad x \in E,$$

где $F(E_0;\ \overset{[m]}{K})$ — множество линейных нормированных функционалов из K^*, проходящих через точки пересечения $\overset{[m]}{K} \cap E_0$. Используя терминологию статей ([1, 2]), дадим следующие

Определения. Подпространство E_0 назовем насыщенным точками множества $\overset{[m]}{K}$, если полунорма $\|\cdot\|^{(m)}$ является нормой на E; насыщенное точками множества $\overset{[m]}{K}$ подпространство E_0 назовем равномерно насыщенным точками множества $\overset{[m]}{K}$, если пространство E полно по норме $\|\cdot\|^{(m)}$; подпространство E_0 назовем вполне насыщенным точками множества $\overset{[m]}{K}$, если множество $F(E_0;\ \overset{[m]}{K})$ содержит подмножество $F_0(E_0;\ \overset{[m]}{K})$ такое, что:

1°) Формула $\|x\|_0{}^{(m)} = \sup\{|f(x)|\,|\,f \in F_0(E_0;\ \overset{[m]}{K})\}$, $x \in E$, определяет норму, эквивалентную норме $\|\cdot\|$ пространства E;

2°) Каждая последовательность функционалов $f_k \in F_0(E_0;\ \overset{[m]}{K})$ имеет предельную в слабой топологии точку $f \in \bigcup\{K^* \cap \{x\}^\perp\,|\,x \in \overset{[m]}{K} \cap E_0\}$.

Насыщенность точками множества $\overset{[m]}{K}$ подпространства E_0 эквивалентна тотальности множества $F(E_0;\ \overset{[m]}{K})$. Подпространство E_0 равномерно насыщено точками множества $\overset{[m]}{K}$ тогда и только тогда, когда нормы $\|\cdot\|^{(m)}$, $\|\cdot\|$ эквивалентны.

Рассмотрим для примера пространство $G_{[a,\,b]}$ непрерывных на $[a, b]$ функций. Пусть $r \geqslant 0$ целое; $\Lambda = \{t_1 < t_2 < \ldots < t_r\} \subset [a, b]$, если $r \geqslant 1$, и $\Lambda = \phi$, если $r = 0$; α — функция, определенная на $[a, b]$ следующим образом: α постоянна на каждом из промежутков $[a, t_1)$, $(t_1, t_2), \ldots$ $\ldots, (t_{r-1}, t_r)$, $(t_r, b]$ так, что на каждом из них $|\alpha(t)| = 1$, и $\alpha(t) = 0$ при $t \in \Lambda$. При $t_1 = a$ $(t_r = b)$ промежуток $[a, t_1)$ $((t_r, b])$ отсутствует. Если $r = 0$, то $\alpha(t) = 1$, $a \leqslant t \leqslant b$, или $\alpha(t) = -1$, $a \leqslant t \leqslant b$. Рассмотрим в $C_{[a,\,b]}$ конус ([13])

$$K_{r,\,\alpha} = \left\{x \in C_{[a,\,b]}\,|\,\operatorname{sign} x(t) = \begin{cases}\text{или } \alpha(t), \\ \text{или } 0,\end{cases} \ a \leqslant t \leqslant b\right\}.$$

Пусть $\omega(x)$ — множество различных нулей функции $x \in C_{[a,\,b]}$; $K_{r,\,\alpha}(m)$ — множество функций из $K_{r,\,\alpha}$, каждая из которых имеет лишь m различных нулей. В пространстве $C_{[a,\,b]}$ с конусом $K_{r,\,\alpha}$ при $0 \leqslant m \leqslant r$ не существует подпространств, насыщенных точками множества $\overset{[m]}{K}_{r,\,\alpha}$. Если же $r < m$, то справедливы следующие

Предложения. 1) *Утверждения*

а) *подпространство* $E_0 \subset C_{[a,\,b]}$ *насыщено точками множества* $\overset{[m]}{K}_{r,\,\alpha}$;

б) *подпространство* E_0 *равномерно насыщено точками множества* $\overset{[m]}{K}_{r,\,\alpha}$;

в) *объединение* $\bigcup\{\omega(x)\,|\,x \in K_{r,\,\alpha}(m) \cap E_0\}$ *плотно в* $[a, b]$ *эквивалентны.*

2) *Если множество* $\{\omega(x) \setminus \Lambda\,|\,x \in K_{r,\,\alpha}(m) \cap E_0\}$ *совпадает с множеством всевозможных сочетаний по* $m - r$ *точек из* $[a, b] \setminus \Lambda$, *то подпро-*

странство E_0 *вполне насыщено точками множества* $\overset{[m]}{K}_{r,\alpha}$, *откуда, в частности, следует*

3) *Для полной насыщенности подпространства* E_0 *точками множества* $\overset{[r+1]}{K}_{r,\alpha}$ *достаточно, чтобы* $\bigcup\{\omega(x)\,|\,x\in K_{r,\alpha}(m)\cap E_0\} = [a, b]$.

В пространстве l_p $(p\geqslant 1)$, с конусом

$$K_{r,\alpha} = \left\{x = (\xi_1, \xi_2, \dots)\in l_p\,|\,\operatorname{sign}\xi_k = \begin{cases}\text{или } \alpha_k, \\ \text{или } 0,\end{cases} \quad k\in N\right\}, \tag{2}$$

где $r\geqslant 0$ целое, N — множество натуральных чисел, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ — числовая последовательность, члены которой удовлетворяют условиям

$$|\alpha_k| = \begin{cases}0, & \text{если } k\in \mathcal{J} = \{i_1 < i_2 < \dots < i_r\}, \quad \mathcal{J} = \phi \quad \text{при } r = 0; \\ 1, & \text{если } k\in N\setminus \mathcal{J},\end{cases}$$

при $0\leqslant m\leqslant r$ не существует подпространств, насыщенных точками множества $\overset{[m]}{K}_{r,\alpha}$. Если через $\omega(x)$ обозначить в этом случае множество номеров нулевых координат вектора $x\in l_p$, а через $K_{r,\alpha}(m)$ — множество векторов конуса (2), каждый из которых имеет лишь m нулевых координат, то при $r < m$ насыщенность подпространства $E_0\subset l_p$ точками множества $\overset{[m]}{K}_{r,\alpha}$ эквивалентна равенству $N = \bigcup\{\omega(x)\,|\,x\in K_{r,\alpha}(m)\cap E_0\}$.

Вообще говоря, из насыщенности подпространства точками множества $\overset{[m]}{K}$ не следует его равномерная насыщенность этими точками. Так, например, в пространстве l_p, $p\geqslant 1$, с конусом (2) подпространство, натянутое на систему $2(m-r)+1$, $r < m$, векторов $e_i = (\alpha_1 c_1, 2^{-i}\alpha_2 c_2, \dots, k^{-i}\alpha_k c_k, \dots)$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2(m-r)$, где $c = (c_1, c_2, \dots)\in l_p$, $c_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$, является насыщенным, но не равномерно насыщенным точками множества $\overset{[m]}{K}_{r,\alpha}$.

3. В дальнейшем B — линейный положительный ([11], [12]) оператор в E, совпадающий на множестве $\overset{[m]}{K}\cap E_0$ с единичным оператором I.

Теорема 1. *Пусть подпространство* E_0 *насыщено точками множества* $\overset{[m]}{K}$ *и обладает свойством* $L(\overset{[m]}{K})$. *Если линейный положительный оператор* A: $E\to E$ *совпадает на* E_0 *с оператором* B, *то* $A = B$.

В случае $B = I$ и $m = 1$ теорема 1 доказана в ([2]). Заметим при этом, что насыщенное точками множества $\overset{[1]}{K}$ подпространство E_0 обладает свойством $L(\overset{[1]}{K})$.

Теорема 2. *Пусть подпространство* E_0 *вполне насыщено точками множества* $\overset{[m]}{K}$ *и обладает свойством* $L(\overset{[m]}{K})$. *Если последовательность линейных положительных операторов* A_n: $E\to E$ *с ограниченной последовательностью норм* $\|A_n\|$ *сильно сходится на* E_0 *к оператору* B:

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n x - Bx\| = 0, \quad x\in E_0, \tag{3}$$

то она сильно сходится к оператору B *и на всем пространстве* E:

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n x - Bx\| = 0, \quad x\in E. \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть подпространство* E_0 *пространства* E *с телесным конусом* K *вполне насыщено точками множества* $\overset{[m]}{K}$ *и обладает усиленным свойством* $L(\overset{[m]}{K})$. *Если последовательность линейных положительных операторов* A_n: $E\to E$ *удовлетворяет условию* (3), *то имеет место* (4).

Теорема 3 обобщает теорему 5 из ([2]).

Пусть $C_{k,l}$ ($k < l$ — произвольные натуральные числа) — последовательность линейных ограниченных операторов в E, сильно сходящаяся (при $k \to \infty$) на E к оператору B. Последовательность линейных операторов B_k: $E \to E$ назовем $[C_{k,l};\ E_0]$-монотонной (на конусе K), если $B_k x \leqslant B_l x + C_{k,l} x$ (т. е. $B_l x + C_{k,l} x - B_k x \in K$), $k < l$, $x \in K$. $[C_{k,l};\ E_0]$-монотонную последовательность операторов в случае $C_{k,l} = B$, $k < l$, будем называть $[B;\ E_0]$-монотонной.

Теорема 4. *Пусть подпространство E_0 вполне насыщено точками множества $\overset{[m]}{K}$ и обладает свойством $L(\overset{[m]}{K})$. Если $[C_{k,l};\ E_0]$-монотонная последовательность линейных операторов B_k: $E \to E$ с ограниченной последовательностью норм $\|B_k\|$ сильно сходится на подпространстве E_0, то она сильно сходится и на всем пространстве E.*

Теорема 5. *Пусть подпространство E_0 пространства E с телесным конусом K вполне насыщено точками множества $\overset{[m]}{K}$ и обладает усиленным свойством $L(\overset{[m]}{K})$. Если $[C_{k,l};\ E_0]$-монотонная последовательность линейных операторов B_k: $E \to E$ сильно сходится на подпространстве E_0, то она сильно сходится и на всем пространстве E.*

Последовательность операторов B_k называют полумонотонной ([2]), если для нее существует число $\alpha_0 > 0$ такое, что $B_k x \leqslant B_l x + \alpha_0 x$ ($k < l$, $x \in K$). Если B_k — полумонотонная последовательность операторов, то последовательность $\alpha_0^{-1} B_k$ является $[I;\ E_0]$-монотонной для любого подпространства E_0. В силу этого в теоремах 4 и 5 условие $[C_{k,l};\ E_0]$-монотонности можно заменить полумонотонностью. В частности, теоремы 4 и 5 остаются в силе и для монотонных ([2]) последовательностей линейных операторов.

В заключение автор выражает признательность М. А. Красносельскому за обсуждение работы и советы.

Коломенский педагогический институт

Поступило 7 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Красносельский, В. С. Климов, Е. А. Лифшиц, ДАН, **162**, № 2 (1965). [2] В. С. Климов, М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц, Тр. Московск. матем. общ., **15** (1966). [3] П. П. Коровкин, ДАН, **90**, № 6 (1953). [4] П. П. Коровкин, Линейные операторы и теория приближений, М., 1959. [5] В. И. Волков, ДАН, **115**, № 1 (1957). [6] В. И. Волков, УМН, **15**, № 1, 91 (1960). [7] Э. Н. Морозов, Уч. зап. Калининск. пед. инст., в. 26, 129 (1958). [8] Л. М. Зыбин, Уч. зап. Калинингр. пед. инст., в. 5, 53, 57 (1958). [9] Ю. А. Шашкин, ДАН, **131**, № 3 (1960). [10] Ю. А. Шашкин, Изв. АН СССР, сер. матем., **26**, № 4 (1962). [11] М. Г. Крейн, М. А. Рутман, УМН, **3**, № 1, 23 (1948). [12] М. А. Красносельский, Положительные решения пооператорных уравнений, М., 1962. [13] Л. Г. Лабскер, ДАН, **197**, № 6 (1971).