

УДК 532.435 : 678.023.5

МЕХАНИКА

Н. В. РОЗЕ

ТЕЧЕНИЕ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

(Представлено академиком В. В. Новожилковым 8 II 1971)

В настоящей работе рассмотрена задача о движении неньютоновской жидкости, подчиняющейся степенному закону, между двумя круговыми цилиндрами, вращающимися с различными угловыми скоростями, оси цилиндров параллельны (рис. 1). Эта задача представляет больший практический интерес, чем задача о движении материала между двумя вращающимися цилиндрами с одинаковыми угловыми скоростями. Она была рассмотрена подробно в работе ⁽¹⁾ для ньютоновской жидкости для случая, когда цилиндры вращаются с одинаковыми угловыми скоростями, в работах ^(2, 3) для случая с разными угловыми скоростями. Эта же задача де-

тально исследована в работе ⁽⁴⁾ для неньютоновских жидкостей, подчиняющихся степенному закону, при вращении цилиндров с одинаковыми угловыми скоростями.

Поставленная в настоящей работе задача сложнее ранее решенных задач, так как для различных зон области течения формулы, описывающие скорость и давление, различны. На границах зон они совпадают.

Исследование полученного решения показывает, что в процессе прокатки материал отрывается от более быстро вращающегося цилиндра и наматывается на более медленно вращающийся цилиндр. Этот эффект ранее был известен только экспериментально ⁽⁷⁾.

Сделаем следующие предположения: задача двумерная, течение ламинар-

ное, движение установившееся, инерционные силы и сила тяжести малы по сравнению с вязкими силами.

Оценка членов, входящих в основные уравнения, производится так же, как в теории пограничного слоя. Основные уравнения можно записать в виде

$$p = p(x), \quad dp/dx = \partial \tau / \partial y; \quad (1)$$

p — давление, τ — касательное напряжение.

Реологические исследования свойств полимеров показывают, что многие из них в достаточно широком диапазоне скоростей сдвига хорошо описываются степенным законом ^(5, 6)

$$\tau = \mu \left(\text{mod } \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{m-1} \frac{\partial u}{\partial y}$$

и уравнение (1) принимает вид

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\text{mod } \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{m-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (2)$$

(u — составляющая скорости вдоль направления x , μ и m — реологические постоянные).

Из условия прилипания материала к боковой поверхности цилиндра имеем (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} y = -h: \quad u &= -fU, \quad U = \omega_2(R + h_0 - h), \\ h &= R + h_0 - \sqrt{R^2 - x^2}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$u = +h: \quad u = -U, \quad f = \omega_1 / \omega_2, \quad 0 < f < 1$$

($2h$ — величина зазора (минимального $2h_0$) между цилиндрами, R — радиус цилиндров).

Из (2) получим

$$\frac{1}{\mu} [p'y - C(x)] = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{m-1} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4)$$

Знак $\partial u / \partial y$ определяет знак $p'y - C(x)$.

Найдем составляющую скорости u из уравнения (4). Возможны следующие случаи:

а) $\partial u / \partial y \leq 0$, $-h \leq y \leq +h$. Из (4), (3) получаем

$$u = \frac{A}{p'} [(-p'y + C)^{1+1/m} - (p'h + C)^{1+1/m}] - fU; \quad (5)$$

$$-U(1-f) = \frac{A}{p'} [(-p'h + C)^{1+1/m} - (p'h + C)^{1+1/m}]; \quad (6)$$

$$A = \left(\frac{1}{\mu} \right)^{1/m} \frac{m}{m+1}.$$

Граничные условия и условие а) могут быть выполнены только при $C(x) > 0$, $p'(x) > 0$ и $p' < 0$.

б) $\partial u / \partial y$ меняет знак с минуса на плюс, $-h \leq y \leq +h$. Аналогичным образом получаем

$$u = \frac{A}{p'} [(-p'y + C)^{1+1/m} - (p'h + C)^{1+1/m}] - fU, \quad y \leq \frac{C}{p'}; \quad (7)$$

$$u = \frac{A}{p'} [(p'y - C)^{1+1/m} - (p'h + C)^{1+1/m}] - fU, \quad y \geq \frac{C}{p'}; \quad (8)$$

$$-U(1-f) = \frac{A}{p'} [(p'h - C)^{1+1/m} - (p'h + C)^{1+1/m}]. \quad (9)$$

Этот случай возможен при $C(x) > 0$, $p'(x) > 0$.

в) $\partial u / \partial y$ меняет знак с плюса на минус, $-h \leq y \leq +h$.

$$u = \frac{A}{p'} [(p'y - C)^{1+1/m} - (-p'h - C)^{1+1/m}] - fU, \quad y \leq \frac{C}{p'}; \quad (10)$$

$$u = \frac{A}{p'} [(p'y - C)^{1+1/m} - (-p'h - C)^{1+1/m}] - fU, \quad y \geq \frac{C}{p'}; \quad (11)$$

$$-U(1-f) = \frac{A}{p'} [(C - p'h)^{1+1/m} - (-p'h - C)^{1+1/m}]. \quad (12)$$

Этот случай возможен только при $C > 0$, $p' < 0$.

г) $\partial u / \partial y \geq 0$, $-h \leq y \leq +h$.

Граничные условия и условие г) одновременно не могут быть выполнены.

Анализ предыдущих соотношений показывает, что вся область течения может быть разбита на четыре зоны, которые схематично изображены на рис. 1. Очевидно, что существует такое значение $x = x_1$, $x_3 < x_1 < x_4$,

при котором $p'(x_1) = 0$. Из (4) и (3) имеем

$$u|_{x=x_1} = -\frac{1}{\mu} C^{1/m}(x_1)(y+h_1) - U_1 f,$$

$$C(x_1) = \mu \left[\frac{(1-f)U_1}{2h_1} \right]^m, \quad U_1 = U|_{h=h_1}, \quad h_1 = h|_{x=x_1}.$$

Перейдем к определению давления $p(x)$. Приравняем расходы $Q = \int_{-h}^{+h} u dy$ в произвольном сечении и в сечении $x = x_1$; тогда получим дифференциальное уравнение для определения $p(x)$.

Для зоны I ($p' > 0$) и III ($p' > 0$ и $p' < 0$)

$$\frac{A}{p'} \left\{ \frac{m}{(2m+1)p'} [(C - p'h)^{2+1/m} - (C + p'h)^{2+1/m}] + 2h(p'h + C)^{1+1/m} \right\} + 2hfU - (1+f)U_1 h_1 = 0. \quad (13)$$

Для зоны II ($p' > 0$)

$$\frac{A}{p'} \left\{ \frac{m}{(2m+1)p'} [(p'h + C)^{2+1/m} + (p'h - C)^{2+1/m}] - 2h(p'h + C)^{1+1/m} \right\} - 2fhU + (1+f)h_1 U_1 = 0. \quad (14)$$

Для зоны IV ($p' < 0$)

$$\frac{A}{p'} \left\{ \frac{m}{(2m+1)p'} [(-p'h + C)^{2+1/m} + (-p'h - C)^{2+1/m}] + 2h(-p'h - C)^{1+1/m} \right\} + 2fhU - (1+f)h_1 U_1 = 0. \quad (15)$$

При $y = +h_2$, $\partial u / \partial y = 0$, т. е. $h_2 p'(x_2) - C(x_2) = 0$, u и p' являются непрерывными функциями во всех точках области течения. На границах зон из соотношений (5)–(9), (13) и непрерывности функций u и p' следует, что при $x = x_2$ $h_2 = h|_{x=x_2}$, $U_2 = U|_{h=h_2}$,

$$C(x_2) = \frac{1}{2} \left[\frac{(1-f)U_2}{2Ah_2} \right]^m, \quad p'(x_2) = \left[\frac{(1-f)U_2}{A} \right]^m \frac{1}{(2h_2)^{m+1}},$$

$$h_2^2 - (R + h_0)h_2 + \frac{(1+f)(2m+1)}{2(m+1+mf)}(R + h_0 - h_1)h_1 = 0, \quad h_2 < h_1.$$

При $x = x_3$ имеем $x_3 = -x_2$ и $h_2 = h_3$, т. е. для $C(x_3)$, $p'(x_3)$ и h_3 справедливы предыдущие формулы.

Аналогичным образом получаем, что при $x = x_4$ $h_4 = h|_{x=x_4}$, $U_4 = U|_{h=h_4}$,

$$C(x_4) = \frac{1}{2} \left[\frac{(1-f)U_4}{2Ah_4} \right]^m, \quad p'(x_4) = -\frac{(1-f)^m U_4^m}{A^m (2h_4)^{2m+1}},$$

$$h_4^2 - (R + h_0)h_4 + \frac{(2m+1)(1+f)}{2(m+mf+f)}(R + h_0 - h_1)h_1 = 0, \quad h_4 > h_1.$$

Из соотношений (1) и (4) получаем $\tau = p'y - C(x)$, $C(x) = 0$; тогда

$$\tau_I = -(p'h - C(x)), \quad \tau_{II} = p'h - C(x),$$

где $\tau_I = \tau|_{y=-h}$, $\tau_{II} = \tau|_{y=+h}$.

Заметим, что при $x = x_2$ $p'(x_2) > 0$.

Представляется естественным, что процесс заканчивается при $x = x_2$, $\partial u / \partial y|_{x=x_2} = 0$, $\tau_{II} = 0$, $\tau_I \neq 0$. Материал отрывается от более быстро вращающегося цилиндра и наматывается на медленно вращающийся цилиндр.

Последнее хорошо согласуется для большинства материалов с экспериментом ⁽⁷⁾. Если задать толщину выходящего листа $2h_2$ и положить $p(x_2) = 0$, то все необходимые для инженерных расчетов величины можно вычислить. Для ньютоновской жидкости $m = 1$,

$$u = \frac{1}{2\mu} p' (y^2 - h^2) - \frac{(1-f)}{2h} y_* - \frac{(1+f)}{2} U,$$

$$p' = \frac{3}{2} \mu \omega_2 (1+f) \frac{(h-h_1)(h-h_*)}{h^2}, \quad h_* = R + h_0 - h_1.$$

h_1 определяется из уравнения

$$h_2^2 - (R + h_0) h_2 + \frac{3}{2} \frac{1+f}{2+f} (R + h_0 - h_1) h_1 = 0, \quad h_2 < h_1.$$

Для симметрического течения $f = 1$, $C(x) \equiv 0$. Соответствующие формулы совпадают с формулами для симметрического течения ⁽⁴⁾.

Изложим приближенное решение несимметричной задачи. Для зоны III разложим в биномиальные ряды (6) и (13) при

$$C > |p'h|. \quad (16)$$

В первом приближении получим

$$C(x) = \mu \left[\frac{(1-f)U}{2h} \right]^m,$$

$$p'(x) = \frac{3}{2} \mu \omega_2 m \left(\frac{1-f}{2} \right)^m \frac{(h_1-h)(h_*-h)}{h^{m+2}} U^{m-1},$$

В зонах II, IV разложим (9), (12), (14), (15) в биномиальные ряды при $|p'h| > C$:

$$C(x) = \left(\frac{1}{\mu} \right)^{1/m} \frac{1-f}{2h^{1/m}} |p'|^{1-1/m},$$

$$p'(x) = \mu \omega_2^m \left(\frac{2m+1}{2m} \right)^m (1+f)^m \frac{(h_1-h) |h_1-h|^{m-1} (h_*-h)^m}{h^{2m+1}}. \quad (17)$$

Нетрудно показать, что условия (16), (17) равносильны условиям $0 < m < 1$, $0 < f < 1$, т. е. ряды сходятся, если перерабатываемый материал есть псевдопластик.

Ленинградский институт авиационного
приборостроения

Поступило
3 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ R. E. Gaskell, J. Appl. Mech., **17**, 334 (1950). ² J. T. Bergen, Proc. Soc. Expr. Stress. Anal., **9**, № 2, 13 (1952). ³ J. T. Bergen, G. W. Scott, J. Appl. Mech., **18**, 101 (1951). ⁴ Н. В. Розе, Инж. физич. журн., **18**, № 2, 237 (1970). ⁵ Переработка термопластических материалов, Э. Берихардт, 1965. ⁶ Н. Г. Бекин, В. А. Немытков, Каучук и резина, № 10 (1966). ⁷ J. Tokita, J. White, J. Appl. Polym. Sci., **10**, 7, 1011 (1966).