Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 2

УДК 539.374.1 *МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ*

П. П. МОСОЛОВ

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТОНКИХ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ПАНЕЛЕЙ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 29 XII 1971)

1. Настоящая работа непосредственно примыкает к работе ([1]), обозначениями и понятиями которой мы пользуемся. В предлагаемой работе тем же методом, что и в ([1]), исследуется асимптотическое поведение нелинейно упругих и пластических панелей. Асимптотическому анализу пластин посвящена обширная литература (см. обзор в ([2])). Математическая теория линейных асимптотических методов изложена в ([3], [4]).

Цель нашей работы — построение первого приближения в задачах для нелинейно упругих и пластических сред. Настоящая работа является продолжением работ ([5], [6]).

Укажем постановки задач, рассматриваемых в работе.

Пусть D_h — прямоугольник в плоскости x_1, x_2: $0 \leqslant x_1 \leqslant L$, $0 \leqslant x_2 \leqslant h$. Рассмотрим векторные поля $\mathbf{v}(x_1, x_2) = (v_1, v_2)$, заданные в области D_h. На полях $\mathbf{v}$ определим функционал

$$J_h(\mathbf{v}) = \frac{1}{h}\left\{\int\limits_{D_h} \varphi\, d\tau - F_h(\mathbf{v})\right\}. \tag{1}$$

Задачи о равновесии нелинейно упругой среды при условии малости деформаций связаны с задачей об экстремуме функционала (1). С исследованием функционала такого же типа связан вопрос об определении истинного кинематического коэффициента для задач пластичности. (Подробнее о функционалах типа (1) и свойствах потенциала φ см. в ([1]).) Функционал (1) рассматривается на полях $\mathbf{v}$, удовлетворяющих дополнительным кинематическим ограничениям. Здесь мы рассматриваем следующие ограничения:

$$\int\limits_0^L |\mathbf{v}(x_1, 0)|\, dx_1 = 0, \tag{2}$$

$$\int\limits_0^h |\mathbf{v}(0, x_2)|\, dx_2 = 0, \tag{3}$$

$$\int\limits_0^h |\mathbf{v}(0, x_2)|\, dx_2 = \int\limits_0^h |v(L, x_2)|\, dx_2 = 0. \tag{4}$$

Задача об экстремуме функционала (1) на полях $\mathbf{v}$, удовлетворяющих условию (2), соответствует задаче о деформировании упругого слоя. Экстремали функционала (I) в классе полей, удовлетворяющих условиям (3) или (4), определяют равновесное состояние панели под действием заданных растягивающих и изгибающих сил при различных закреплениях на торцах.

2. Рассмотрим сначала задачу об упругом слое. Введем масштабные преобразования

$$x_1 = x, \quad x_2 = h\xi, \quad v_2 = \frac{1}{h} v_2'.$$

Обозначим через D область $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Перепишем (1) в виде

$$J_h(v_1, v_2') = \int\limits_D \varphi\left(x, \xi, h, \frac{\partial v_1}{\partial x}, \frac{1}{h^2}\frac{\partial v_2'}{\partial \xi}, \frac{1}{2h}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2'}{\partial x}\right)\right) dx\, d\xi - G_h(v_1, v_2'). \tag{5}$$

В дальнейшем штрих у v_2' будем опускать. Предположим, что функционал $G_h(v_1, v_2)$ имеет вид

$$G_h(\mathbf{v}) = \int_D \mathbf{m}\mathbf{v}\, dx\, d\xi + \int_\Gamma \mathbf{t}\mathbf{v}\, ds.$$

Используя результаты работы [7], $G_h(\mathbf{v})$ можно переписать в виде

$$G_h(\mathbf{v}) = \int_D \Big[q_1(x, \xi, h) \frac{1}{h}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right) + q_2(x, \xi, h)\frac{1}{h^2}\frac{\partial v_2}{\partial \xi} +$$

$$+ q_3(x, \xi, h)\frac{\partial v_1}{\partial x}\Big]\, dx\, d\xi.$$

Предполагается, что существуют функции $q_1{}^0(x, \xi)$, $q_2{}^0(x, \xi)$ такие, что

$$\max_{x,\,\xi} | q_i(x, \xi, h) - q_i^0(x, \xi) | = \varepsilon_i(h),\ i = 1, 2; \quad \max_{x,\,\xi} | q_3(x, \xi, h) | = \varepsilon_3(h), \tag{6}$$

где $\varepsilon_i(h) \to 0$ при $h \to 0$, $i = 1, 2, 3$.

Предположение (6) в значительной степени определяет асимптотическое поведение экстремалей функционала (5).

Для простоты, в дальнейшем будем считать, что $q_i{}^0(x, \xi)$ — гладкие функции, обращающиеся в нуль в некоторой окрестности точек $x = 0$, $x = L$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Относительно потенциала φ сделаем еще следующее предположение: существует функция $\varphi^0(x, \xi, e_{ij})$ такая, что

$$\max_{x,\,\xi} | \varphi(x, \xi, h, e_{ij}) - \varphi^0(x, \xi, e_{ij}) | \leqslant \varepsilon_4(h) \Big[\sum_{ij} | e_{ij} |^p + C\Big], \tag{7}$$

где $\varepsilon_4(h) \to 0$ при $h \to 0$. Введем функционал $J_h{}^0(\mathbf{v})$:

$$J_h^0(\mathbf{v}) = \int_D \Big[\varphi^0\Big(x, \xi, \frac{\partial v_1}{\partial x}, \frac{1}{h^2}, \frac{\partial v_2}{\partial \xi}, \frac{1}{2h}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right)\Big) -$$

$$- q_1^0(x, \xi)\frac{1}{h}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right) - q_2^0(x, \xi)\frac{1}{h^2}\frac{\partial v_2}{\partial \xi}\Big]\, dx\, d\xi.$$

Введем в пространстве полей $\mathbf{v}$ норму

$$|||\, \mathbf{v}\, |||_{\mathbf{L}_p^1(h)} = \left\{\int_D \left[\frac{1}{4h^2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{h^4}\left(\frac{\partial v_2}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)^2\right]^{p/2} dx\, d\xi\right\}^{1/p}.$$

Лемма 1. *Если поля* $\mathbf{v}$ *удовлетворяют условияю* (2), *то*

$$\Big| \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{L}_p^1(h)} J_h^0 - \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{L}_p^1(h)} J_h \Big| < C \sum_1^4 \varepsilon_i(h).$$

Обозначим через $J^*(a, b)$ следующий функционал:

$$J^*(a, b) = \int_D \Big[\varphi^0\Big(x, \xi, 0, a, \frac{1}{2}b\Big) - q_1^0 b - q_2^0 a\Big]\, dx\, d\xi.$$

Пусть $\inf J^* = J^* = J^*(a^*, b^*)$. Если a^*, b^* — гладкие функции по переменным x, ξ, то из леммы 2 вытекает

Теорема 1. *Существуют числа* C, C_δ *такие, что*

$$Ch^p + J^* \geqslant \inf J_h^0 \geqslant J^* - C_\delta h^{p/(3p-1)-\delta}. \tag{8}$$

Заметим, что, зная различие между J^* и нижней гранью функционала J_h, мы можем найти поле $\mathbf{v}^*$, асимптотически близкое (в соответствующей метрике, связанной с потенциалом φ) к полю $\mathbf{v}_h$, минимизирующему функционал J_h.

3. Рассмотрим задачу об асимптотическом поведении истинного кинематического коэффициента в задаче о деформации слоя. (Определение истинного кинематического коэффициента см., например, в [1].) В этом случае мы должны рассмотреть функционал

$$J_h(\mathbf{v}, C) = \int_D \Big\{\tau_0(x, \xi)\left[\frac{1}{2h^2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{2}{h^4}\left(\frac{\partial v_2}{\partial \xi}\right)^2\right]^{1/2} -$$

$$- C\left[t_1(x, \xi, h)\frac{1}{h}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right) + t_2(x, \xi, h)\frac{1}{h^3}\frac{\partial v_2}{\partial \xi}\right]\Big\}\, dx\, d\xi. \tag{9}$$

Функционал (9) будет изучаться на полях, удовлетворяющих условию (2) и условию несжимаемости

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{h^2}\frac{\partial v_2}{\partial \xi} = 0. \tag{10}$$

Относительно функций t_1, t_2 мы сделаем те же предположения, что и о функциях q_1, q_2 в п. 2. Преобразуем интеграл

$$\int\limits_D t_2 \frac{1}{h^3}\frac{\partial v_2}{\partial \xi}\, dx\, d\xi = \int\limits_D \left[\int\limits_\xi^1 \frac{\partial t_2}{\partial x}(x, \mu, h)\, d\mu\right] \frac{1}{h}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right) dx\, d\xi +$$

$$+ h\int\limits_D \left[\int\limits_\xi^1 d\xi_1 \int\limits_{\xi_1}^1 \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2}(x, \mu, h)\, d\mu\right] \frac{1}{h^2}\frac{\partial v_2}{\partial \xi}\, dx\, d\xi. \tag{11}$$

При получении равенства (11) мы воспользовались условием (10) и финитностью функции t_2.

Соотношение (10) позволяет переписать функционал (9) в виде

$$J_h(\mathrm{v}, C) = \int\limits_D \left\{\tau_0(x, \xi)\left[\frac{1}{2h^2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{2}{h^4}\left(\frac{\partial v_2}{\partial \xi}\right)^2\right]^{1/2} -\right.$$

$$\left. - C\left[r_1(x, \xi, h)\frac{1}{h}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right) + r_2(x, \xi, h)\frac{1}{h^2}\frac{\partial v_2}{\partial \xi}\right]\right\} dx\, d\xi.$$

Предположим, что существует функция $r_1^0(x, \xi)$ такая, что

$$\begin{aligned} &\max_{x,\xi} |r_1(x, \xi, h) - r_1^0(x, \xi)| = \varepsilon_1(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0; \\ &\max_{x,\xi} |r_2(x, \xi, h)| = \varepsilon_2(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Введем функционал $J^*(a, C)$:

$$J^*(a, C) = \int\limits_D \left[\frac{\tau_0(x, \xi)}{\sqrt{2}}|a(x, \xi)| - C r_1^0(x, \xi)\, a(x, \xi)\right] dx\, d\xi.$$

Для функционала $J^*(a, C)$ легко вычислить истинный кинематический коэффициент C^*.

Если C_h — истинный кинематический коэффициент для функционала $J_h(\mathrm{v}, C)$, то, используя леммы 1 и 2, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. $|C^* - C_h| \leqslant K[\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h) + \sqrt{h}]$, *где* $\varepsilon_1(h)$, $\varepsilon_2(h)$ *определены соотношениями* (12), *число* K *от* h *не зависит.*

4. Рассмотрим теперь задачу о совместном изгибе и растяжении упругой панели. Вернемся снова к функционалу (5). Запишем $G_h(\mathrm{v})$ в виде

$$G_h(\mathrm{v}) = \int\limits_D \left[q_1(x, \xi, h)\frac{\partial v_1}{\partial x} + q_2(x, \xi, h)\frac{1}{h^2}\frac{\partial v_2}{\partial \xi} +\right.$$

$$\left. + q_3(x, \xi, h)\frac{1}{h}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right)\right] dx\, d\xi.$$

Относительно функций q_i сделаем предположения, аналогичные (6). Именно, пусть существуют функции $q_1^0(x, \xi)$, $q_2^0(x, \xi)$ такие, что

$$\begin{aligned} &\max_{x,\xi} |q_i(x, \xi, h) - q_i^0(x, \xi)| \to 0, \ i = 1, 2; \\ &\max_{x,\xi} |q_3(x, \xi, h)| \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Далее, аналогично предыдущему, вводится функционал

$$J_h^0(\mathrm{v}) = \int\limits_D \left[\varphi^0\left(x, \xi, \frac{\partial v_1}{\partial x}, \frac{1}{h^2}\frac{\partial v_2}{\partial \xi}, \frac{1}{2h}\left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right)\right) -\right.$$

$$\left. - q_1^0(x, \xi)\frac{\partial v_1}{\partial x} - q_2^0(x, \xi)\frac{1}{h^2}\frac{\partial v_2}{\partial \xi}\right] dx\, d\xi.$$

Здесь φ^0 определяется соотношением (7).

Лемма 2. *Если поля* v *удовлетворяют условию* (3) *или* (4), *то*

$$\inf_{\mathbf{v}\in \mathbf{L}_p^1(h)} J_h^0(\mathbf{v}) - \inf_{\mathbf{v}\in \mathbf{L}_p^1(h)} J_h(\mathbf{v}) \to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0.$$

Обозначим через $P_n(\xi)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, ортонормированную в L_2 [0, 1] систему многочленов Лежандра. Рассмотрим функционал $J_h^0(\mathbf{v})$ на полях вида

$$v_1(x,\xi) = u_0(x)P_0 + u_1(x)P_1(\xi), \quad v_2(x,\xi) = -\sqrt{3}\,P_0\int_0^x u_1(\alpha)\,d\alpha + \\ + h^2 w(x,\xi). \tag{14}$$

На полях (14) функционал $J_h^0(\mathbf{v})$ имеет вид

$$J_h^0(\mathbf{v}) = J_h^*(u_0, u_1, w) = \int_D \left[\varphi^0\left(x, \xi, u_0' P_0 + u_1' P_0 + u_1' P_1, h\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial \xi}\right) - \right. \\ \left. - q_2^0 \frac{\partial w}{\partial \xi}\right] dx\,d\xi - \int_0^L q_0(x)\,u_0'(x)\,dx - \int_0^L q_1(x)\,u_1'(x)\,dx.$$

Очевидно, что

$$\inf_{u_0, u_1, w} J_h^* \geqslant \inf_{\mathbf{v}} J_h^0. \tag{15}$$

Рассмотрим функционал

$$J^*(u_0, u_1, w) = \int_D [\varphi^0(x, \xi, u_0' P_0 + u_1' P_1, 0, w_\xi') - q_2^0 w_\xi']\,dx\,d\xi - \\ - \int_0^L (q_0 u_0' + q_1 u_1')\,dx.$$

Если поле v подчинено условию (3), то функции u_0, u_1, w должны удовлетворять ограничениям

$$u_0(0) = u_1(0) = \int_0^1 |w(0,\xi)|\,d\xi = 0. \tag{16}$$

Если же v подчинено условию (4), то

$$u_0(0) = u_1(0) = \int_0^1 |w(0,\xi)|\,d\xi = u_0(L) = u_1(L) = \int_0^1 |w(L,\xi)|\,d\xi = \\ = \int_0^L u_1(\alpha)\,d\alpha = 0. \tag{17}$$

Лемма 3. *Существует функция* $\delta(h)$, $\delta(h)\to 0$ *при* $h\to 0$ *такая, что*

$$\delta(h) + \inf J^* \geqslant \inf J_h^* \geqslant \inf J^*.$$

Задача о нахождении экстремалей функционала J^* на функциях u_0, u_1, w, удовлетворяющих условиям (16) или (17), есть алгебраическая задача.

Лемма 4. $\inf\limits_{\mathbf{v}} J_h^0(\mathbf{v}) \geqslant \inf\limits_{u_0, u_1, w} J^* - \gamma(h)$, *где* $\gamma(h)\to 0$ *при* $h\to 0$.

Из лемм 2—4 вытекает

Теорема 3. $\inf J_h - \inf J^* \to 0$ *при* $h\to 0$.

Нижние грани функционалов в теореме 3 вычисляются на полях, удовлетворяющих соответствующим кинематическим ограничениям.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. П. Мосолов, ДАН, **206**, № 1 (1972). [2] А. Л. Гольденвейзер, Тр. VII Всесоюзной конфер. по теории оболочек и пластин, «Наука», 1970. [3] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, УМН, **12**, № 5, 3 (1957). [4] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, УМН, **15**, № 4, 27 (1960). [5] P. P. Mosolow, W. P. Miasnikow, Rozprawy Inzynierske, **2**, № 18, 222 (1970). [6] П. П. Мосолов, В. П. Мясников, Вариационные методы в теории жестко-вязко-пластических сред, М., 1971. [7] П. П. Мосолов, А. П. Мясников, ДАН, **201**, № 1, 36 (1971).