УДК 530.1;539.12

В. В. АНДРЕЕВ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЯДРА УРАВНЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДВУХФЕРМИОННОЙ СИСТЕМЫ

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

(*Поступила в редакцию 25.02.2011*)

Введение. Эксперимент по измерению энергетического интервала $E(2P_{3/2}^{F=2})-E(2S_{1/2}^{F=1})$ мюонного атома водорода [1] привел к значимому различию с теоретическими вычислениями. Это обстоятельство стимулировало новый виток исследований простейших атомных систем и их параметров (см., например, [2, 3]).

Основу вычислений энергетической структуры связанных систем составляет процедура получения потенциала взаимодействия частиц. Поскольку построение потенциала взаимодействия осуществляют, как правило, с помощью соответствующей амплитуды T_{fi} упругого рассеяния [4–6], то эффективным инструментом в данной ситуации является расчет соответствующих матричных элементов, как явно скалярных функций.

Существенный вклад в создание методов вычисления матричных элементов внесла школа академика Ф. И. Федорова [7–12]. Созданный метод расчета (метод Богуша–Федорова) был усовершенствован и показал свою эффективность при вычислении наблюдаемых величин реакций взаимодействия элементарных частиц (см. [13–15] и др.).

Цель данной работы – получить ядро радиального уравнения двухфермионной релятивистской системы в импульсном пространстве на основе точного расчета амплитуды однобозонного обмена. Данное вычисление не является простым и поэтому представляет собой самостоятельную задачу.

1. Процедура построения потенциала. В основе метода вычисления потенциала взаимодействия лежит его определение через амплитуду T_{fi} соответствующего процесса упругого рассеяния [6]:

$$\hat{V}_{f\,i}=-(2\pi)^3\delta\left(P_f'-P_i\right)T_{fi}. \tag{1}$$

Наиболее общепринятой методикой является расчет спинорных структур в терминах матриц Паули и импульсов с использованием явного вида биспиноров [6, 16–19]. Такое вычисление, как правило, делают приближенно, применяя разложение по скоростям υ/c частиц системы. Далее рассчитывают потенциал $V(\mathbf{r})$ в координатном пространстве, как фурье-преобразование амплитуды рассеяния T_{fi} [20–22].

В отличие от вышеупомянутой методики в работе планируется произвести точный расчет (без разложения по скоростям частиц системы) ядра радиального уравнения релятивистской системы, как скалярной функции импульсов частиц.

Для расчетов энергетических спектров релятивистских фермион-фермионных систем используются различные модели: уравнения Бете–Солпитера [23], эффективные уравнения Дирака [24], квазипотенциальный подход [25–27], вариационные волновые уравнения [19] и др. [28]. В данной работе описание связанных состояний проводится в рамках пуанкаре-ковариантной модели, основанной на релятивистской гамильтоновой динамике (РГД).

Основным требованием РГД является условие сохранение пуанкаре-инвариантности как для систем без взаимодействия, так и для взаимодействующих частиц [29, 30]. В случае системы двух частиц с массами m_q и m_Q и соответственно с 4-импульсами $p_1 = (\omega_{m_q}(p_1), \mathbf{p}_1)$ и $p_2 = (\omega_{m_Q}(p_2), \mathbf{p}_2)$ это требование, в рамках мгновенной и точечной форм РГД, приводит к радиальному уравнению для связанного состояния с волновой функцией $\Phi^{J\mu}_{L,S}(k)$ [30]:

$$\sum_{L',S'} \int_0^\infty V^J_{L,S;L',S'}\left(k,k'\right) \Phi^{J\mu}_{L',S'}\left(k'\right) k'^2 dk' = (M - M_0)\Phi^{J\mu}_{L,S}(k), \tag{2}$$

где $M_0 = \omega_{m_Q}(k) + \omega_{m_q}(k)$ – эффективная масса системы невзаимодействующих частиц, имеющих импульс относительного движения $\mathbf{k}$ $(k = |\mathbf{k}|)$.

Матричный элемент оператора взаимодействия в $L - S$ схеме $V^J_{L',S',L,S}(k',k)$ связан с матричным элементом в схеме «спиральностей» посредством соотношения

$$V^J_{L',S';L,S}(k',k) = \frac{\sqrt{(2L+1)(2L'+1)}}{2J+1} \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2'} C^{1/2\ \ 1/2\ \ S}_{\lambda_1/2\ -\lambda_2/2\ \lambda/2}\, C^{L\ S\ J}_{0\ \lambda/2\ \lambda/2} \times$$
$$C^{1/2\ \ 1/2\ \ S'}_{\lambda_1'/2\ -\lambda_2'/2\ \lambda'/2}\, C^{L'\ S'\ J}_{0\ \lambda'/2\ \lambda'/2}\, V^J_{\lambda_1',\lambda_2',\lambda_1,\lambda_2}(k',k). \tag{3}$$

В свою очередь $V^J_{\lambda_1',\lambda_2',\lambda_1,\lambda_2}(k',k)$ связан с потенциалом $< k', \lambda_1', \lambda_2' \| \hat{V} \| k, \lambda_1, \lambda_2 >$ разложением Джакоба–Вика (см., например, [31]):

$$V^J_{\lambda_1',\lambda_2';\lambda_1,\lambda_2}(k',k) = \int_{-1}^{1} d(\cos\beta) \int_0^{2\pi} d\phi\, D^J_{\lambda,\lambda'}(\phi,\beta,-\phi) \left\langle k', \lambda_1', \lambda_2' \| \hat{V} \| k, \lambda_1, \lambda_2 \right\rangle, \tag{4}$$

где $\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2)/2$, $\lambda' = \left(\lambda_1' - \lambda_2'\right)/2$ и $\cos\beta = \left(\mathbf{k}\mathbf{k}'\right) / \left(|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|\right)$.

2. Ядро потенциала релятивистской двухфермионной системы с электромагнитным взаимодействием. Для построения потенциала V $e^- p$ – системы (атом водорода) применим вышеописанную методику с использованием амплитуды упругого рассеяния:

$$e^-(k_1, \lambda_{k1}) + p(k_2, \lambda_{k2}) \to e^-(p_1, \lambda_{p1}) + p(p_2, \lambda_{p2}), \tag{5}$$

где импульсы частиц и спиновые индексы указаны в скобках.

Согласно теории возмущений матричный элемент потенциала фермион-фермионной системы будет представлять ряд матричных элементов постоянной тонкой структуры α, в котором основной вклад определяет однофотонный обмен между e^- и p.

Используя правила Фейнмана и определение (1), запишем матричный элемент, соответствующий диаграмме однофотонного обмена:

$$V_{1\gamma}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = (-1)\, N_{k,k'} \frac{Z\alpha}{8\pi^2 q^2}\, j^{\mu}_{\lambda_{p1},\lambda_{k1}}(p_1,k_1) D_{\mu\nu}(q) j^{\nu}_{\lambda_{p2},\lambda_{k2}}(p_2,k_2), \tag{6}$$

$$j^{\mu}_{\lambda_{pi},\lambda_{ki}}(p_i,k_i) = \bar{u}_{\lambda_{pi}}(p_i)\gamma^{\mu} u_{\lambda_{ki}}(k_i)\ \ (i = 1,2). \tag{7}$$

Импульсы частиц в системе центра инерции имеют следующие компоненты:

$$k_1 = (\omega_{m1}(k),\ \mathbf{k}),\ p_1 = \left(\omega_{m1}\left(k'\right),\ \mathbf{k}'\right),\ \ k_2 = (\omega_{m2}(k), -\mathbf{k}),\ p_2 = \left(\omega_{m2}\left(k'\right), -\mathbf{k}'\right), \tag{8}$$

параметр Z определяет величину электрического заряда второго фермиона (для атома водорода $Z=1$), а

$$N_{k,k'}=1/\sqrt{\omega_{m1}(k)\omega_{m1}\left(k'\right)\omega_{m2}(k)\omega_{m2}\left(k'\right)}.$$

Функция $D_{\mu\nu}(q)$ связана с пропагатором фотона (без q^2 и нормировочных множителей), а q – импульс фотона в с. ц. и.:

$$q=\{q_0=0,\mathbf{k}-\mathbf{k}'\}. \tag{9}$$

Уже на начальном этапе сталкиваемся с необходимостью модификации потенциала $V_{1\gamma}(\mathbf{k},\mathbf{k}')$. Требование сохранения тока (см. [5]) приводит к тому, что

$$q_\mu\, j^\mu_{\lambda_{p1},\lambda_{k1}}(p_1,k_1)=q_\mu j^\mu_{\lambda_{p2},\lambda_{k2}})p_2,k_2)=0. \tag{10}$$

Но при этом, как следует из определения (7), выполняются соотношения

$$q_{1,\mu}\, j^\mu_{\lambda_{p1},\lambda_{k1}}(p_1,k_1)=0\ ,\quad q_{2,\mu}\, j^\mu_{\lambda_{p2},\lambda_{k2}}(p_2,k_2)=0, \tag{11}$$

$$q_1=\left\{\omega_{m1}(k)-\omega_{m1}\left(k'\right),\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right\},\quad q_2=\left\{\omega_{m2}\left(k'\right)-\omega_{m2}(k),\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right\}, \tag{12}$$

а не требование (10). Причина этого состоит в различии компонент $q_0=0$, q_{1_0} и q_{2_0} и связана с необходимостью учета эффектов связанности (виртуальности) частиц [5]. Поэтому соотношение $k=k'$, которое следует из законов сохранения 4-импульса системы частиц в случае упругого рассеяния, не может быть применено для устранения несовпадения нулевых компонент 4-векторов q и q_1,q_2.

Выполнить требование калибровочной инвариантности (10) можно с помощью модификации токов $j^\mu_{\lambda_{p1,2},\lambda_{k1,2}}(p_{1,2},k_{1,2})$ посредством их переопределения (см., например, [32]):

$$j^\mu_{\lambda_{pi},\lambda_{ki}}(p_i,k_i)\to j^\mu_{\lambda_{pi},\lambda_{ki}}(i)=\left(g^\mu_{\ \nu}-\frac{q^\mu q_\nu}{q^2}\right)j^\nu_{\lambda_{pi},\lambda_{ki}}(p_i,k_i). \tag{13}$$

В итоге, потенциал однобозонного обмена с учетом условия сохранения токов запишется в виде

$$V_{1\gamma}(\mathbf{k},\mathbf{k}')=N_{k,k'}\frac{Z\alpha}{8\pi^2 q^2}\, j^\mu_{\lambda_{p1},\lambda_{k1}}(1)D_{\mu\nu}(q)j^\nu_{\lambda_{p2},\lambda_{k2}}(2). \tag{14}$$

Если учесть в потенциале вклады диаграмм, более высокого порядка по константе взаимодействия α (поляризация вакуума, обмен фотоном между электронами), то для фейнмановской калибровки фотона получим следующее выражение:

$$<k',\lambda_{p1},\lambda_{p2}\,||\hat{V}||\,k,\lambda_{k1},\lambda_{k2}>=-\frac{Z\alpha\,\Pi\left(\alpha,q^2\right)}{8\pi^2 q^2\sqrt{\omega_{m1}(k)\omega_{m1}\left(k'\right)\omega_{m2}(k)\omega_{m2}\left(k'\right)}}\times$$

$$J^\mu_{\lambda_{p1},\lambda_{k1}}(p_1,k_1)\left(g_{\mu\rho}-\frac{q_\mu q_\rho}{q^2}\right)J^\rho_{\lambda_{p2},\lambda_{k2}}(p_2,k_2), \tag{15}$$

где одночастичные фермионные токи записываются в виде:

$$J^{\mu}_{\lambda_{p1},\lambda_{k1}}(p_1,k_1)=\bar{u}_{\lambda_{p1}}(p_1)\left(F_1^e\left(q_1^2\right)\gamma^{\mu}+\frac{F_2^e\left(q_1^2\right)}{2\,m_1}i\,\sigma^{\mu\nu}q_{1,\nu}\right)u_{\lambda_{k1}}(k_1),$$

$$J^{\mu}_{\lambda_{p2},\lambda_{k2}}(p_2,k_2)=\bar{u}_{\lambda_{p2}}(p_2)\left(F_1^p\left(q_2^2\right)\gamma^{\mu}+\frac{F_2^p\left(q_2^2\right)}{2\,m_2}i\sigma^{\mu\tau}q_{2,\tau}\right)u_{\lambda_{k2}}(k_2). \qquad (16)$$

Здесь $\Pi\left(\alpha,q^2\right)$ – функция, связанная с поляризацией вакуума за счет фермионных петель, а $F_{1,2}^{e,p}\left(q^2\right)$ – формфакторы электрона и протона. Явный вид $\Pi\left(\alpha,q^2\right)$ и $F_{1,2}^{e}\left(q^2\right)$ можно найти в [4].

3. Расчет спинорной части. Для упрощения расчетов преобразуем токи (16), используя тождество Гордона. Тогда первая часть потенциала (15), пропорциональная скалярному произведению фермионных токов, сводится к сумме:

$$V^{(A)}_{\lambda_{p1},\lambda_{p2}\,\lambda_{k1},\lambda_{k2}}(k',k)=-\frac{Z\alpha}{8\pi^2q^2}N_{k,k'}\{K^{(I)}(\tilde{q}^2)\bar{u}_{\lambda_{p1}}(p_1)\gamma_{\mu}u_{\lambda_{k1}}(k_1)\bar{u}_{\lambda_{p2}}(p_2)\gamma^{\mu}u_{\lambda_{k2}}(k_2)+$$

$$\frac{K^{(IV)}(\tilde{q}^2)}{4\,m_1m_2}(p_1+k_1)^{\nu}(p_2+k_2)_{\nu}\bar{u}_{\lambda_{p1}}(p_1)u_{\lambda_{k1}}(k_1)\bar{u}_{\lambda_{p2}}(p_2)u_{\lambda_{k2}}(k_2)-\frac{K^{(II)}(\tilde{q}^2)}{2\,m_1}\bar{u}_{\lambda_{p1}}(p_1)u_{\lambda_{k1}}(k_1)\times$$

$$\bar{u}_{\lambda_{p2}}(p_2)(\hat{p}_1+\hat{k}_1)u_{\lambda_{k2}}(k_2)-\frac{K^{(III)}(\tilde{q}^2)}{2\,m_2}\bar{u}_{\lambda_{p1}}(p_1)(\hat{p}_2+\hat{k}_2)u_{\lambda_{k1}}(k_1)\bar{u}_{\lambda_{p2}}(p_2)u_{\lambda_{k2}}(k_2)\} \qquad (17)$$

с функциями, зависящими от q^2 и k,k' и с магнитными формфакторами фермионов $G_M^{e,p}\left(q^2\right)$:

$$K^{(I,II)}(\tilde{q}^2)=\Pi\left(\alpha,q^2\right)G_M^p\left(q_2^2\right)\left\{G_M^e\left(q_1^2\right),F_2^e\left(q_1^2\right)\right\}, \qquad (18)$$

$$K^{(III,IV)}(\tilde{q}^2)=\Pi\left(\alpha,q^2\right)F_2^p\left(q_2^2\right)\left\{G_M^e\left(q_1^2\right),F_2^e\left(q_1^2\right)\right\}. \qquad (19)$$

Для преобразования спинорных структур в явно скалярные функции используем метод базисных спиноров (МБС) [15, 33]. С его помощью фермионные «цепочки» с оператором γ^{μ} представляется в виде:

$$\bar{u}_{\lambda_p}(p,s_p)\gamma^{\mu}u_{\lambda_k}(k,s_k)=\sum_{\sigma,\rho=-1}^{1}\sum_{A,C=-1}^{1}\bar{s}^{(C)}_{\lambda_p,\sigma}(p)\Gamma^{C,A}_{\sigma,\rho}\left[\gamma^{\mu}\right]s^{(A)}_{\rho,\lambda_k}(k), \qquad (20)$$

где коэффициенты разложения по базисным спинорам $s^{(A)}_{\rho,\lambda_k}(k)$ для спиральных состояний определены соотношениями [34]

$$s^{(A)}_{\rho,\lambda}(p)=\bar{u}_{\rho}(b_A)u_{\lambda}(p)=-\lambda\tilde{W}_{m_p}(-\lambda\,\rho\,p)D^{*1/2}_{A\rho/2,-\lambda/2}(\phi_p,\theta_p,-\phi_p), \qquad (21)$$

$$\tilde{W}_{m_p}(\pm p)=\sqrt{\omega_{m_p}(p)\pm p}. \qquad (22)$$

Конструкция $\Gamma^{C,A}_{\sigma,\rho}\left[\gamma^{\mu}\right]$ вычисляется через 4-векторы изотропной тетрады b_A и n_{λ} $(A,\lambda=\pm1)$ с помощью основных соотношений МБС:

$$\Gamma^{C,A}_{\rho,\sigma}\left[\gamma^{\mu}\right]=2\,\delta_{\sigma,-\rho}\left(\delta_{C,-A}\,b^{\mu}_{-A}+A\,\delta_{C,A}\,n^{\mu}_{-A\times\rho}\right). \qquad (23)$$

Поскольку скалярные произведения векторов изотропной тетрады удовлетворяют соотношениям

$$(b_\rho b_{-\lambda}) = \delta_{\lambda,\rho}/2, \quad (n_\lambda n_{-\rho}) = \delta_{\lambda,\rho}/2, \quad (b_\rho n_\lambda) = 0\,, \tag{24}$$

то, подставляя коэффициенты (21), найдем произведение фермионных токов в (17) в виде

$$N_{k,k'}\bar{u}_{\lambda_{p1}}(p_1)\gamma^\mu u_{\lambda_{k1}}(k_1)\bar{u}_{\lambda_{p2}}(p_2)\gamma_\mu u_{\lambda_{k2}}(k_2) =$$

$$2\sum_{\sigma,\rho=-1}^{1}\sqrt{(1-\sigma\lambda_{k1}\upsilon_{k1})(1-\rho\lambda_{k2}\upsilon_{k2})}\sqrt{(1-\sigma\lambda_{p1}\upsilon_{p1})(1-\rho\lambda_{p2}\upsilon_{p2})}\times$$

$$[\delta_{\lambda_{k1},\lambda_{k2}}\rho\,\sigma D^{*1/2}_{-\lambda_{k1}/2,\lambda_{p1}/2}(\phi,\beta,-\phi)D^{*1/2}_{\lambda_{k1}/2,-\lambda_{p2}/2}(\phi,\beta,-\phi)+$$

$$\delta_{\rho\lambda_{k1},\sigma\lambda_{k2}}D^{*1/2}_{\lambda_{k1}/2,\lambda_{p1}/2}(\phi,\beta,-\phi)D^{*1/2}_{-\lambda_{k2}/2,-\lambda_{p2}/2}(\phi,\beta,-\phi)]\,. \tag{25}$$

Здесь

$$\upsilon_{k1} = \frac{k}{\omega_{m1}(k)},\ \upsilon_{p1} = \frac{k'}{\omega_{m1}\left(k'\right)},\ \upsilon_{k2} = \frac{k}{\omega_{m2}(k)},\ \upsilon_{p2} = \frac{k'}{\omega_{m2}\left(k'\right)}. \tag{26}$$

В дальнейшем, согласно (4), для интегрирования по угловым переменным будут необходимы спинорные структуры потенциала (17), умноженные на $D^{J}_{\lambda,\lambda'}(\phi,\beta,-\phi)$ с $\lambda = (\lambda_{k1}-\lambda_{k2})/2$ и $\lambda' = (\lambda_{p1}-\lambda_{p2})/2$. Представление спинорной части в форме (25) и разложение Клебша–Гордана для D матриц позволяет записать в подынтегральное выражение формулы (4), как линейную комбинацию полиномов Лежандра $P_L(\cos\beta)$, и таким образом, разделить угловые переменные и переменные $k = |\mathbf{k}|, k' = |\mathbf{k}'|$. Для сокращения записи рассчитанных структур введем вспомогательные функции

$$G^{J,s_1,s_2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}[\Phi(x)] = \sum_{s=|s_1-s_2|}^{s_1+s_2}\sum_{L=|J-s|}^{J+s}\frac{(2L+1)}{(2J+1)}\times$$

$$C^{s_1\ \ s_2\ \ S}_{\lambda_{k1}/2\,-\lambda_{k2}/2\,\lambda/2}C^{L\ S\ J}_{0\,\lambda/2\,\lambda/2}C^{s_1\ \ s_2\ \ S'}_{\lambda'_{p1}/2\,-\lambda'_{p2}/2\,\lambda'/2}C^{L'\ S'\ J}_{0\,\lambda'/2\,\lambda'/2}\Phi_L(x), \tag{27}$$

$$W_{\lambda,\rho}(k) = \sqrt{1+\lambda\,\upsilon_{k1}}\sqrt{1+\rho\upsilon_{k2}}\,, \quad W_{\lambda,\rho}\left(k'\right) = \sqrt{1+\lambda\,\upsilon_{p1}}\sqrt{1+\rho\upsilon_{p2}}\,. \tag{28}$$

После вычисления методом базисных спиноров, аналогичную (25) структуру имеют и другие спинорные структуры потенциала (17). Приведем окончательные выражения для спинорных структур, умноженных на функцию $D^{J}_{\lambda,\lambda'}(\phi,\beta,-\phi)$:

$$D^{J}_{\lambda,\lambda'}(\phi,\beta,-\phi)\,N_{k,k'}\bar{u}_{\lambda_{p1}}(p_1)\gamma^\mu u_{\lambda_{k1}}(k_1)\bar{u}_{\lambda_{p2}}(p_2)\gamma_\mu u_{\lambda_{k2}}(k_2) = 2\sum_{\sigma,\rho=-1}^{1}W_{-\sigma\lambda_{k1},-\rho\lambda_{k2}}(k)\,W_{-\sigma\lambda_{p1},-\rho\lambda_{p2}}\left(k'\right)\times$$

$$\left[\delta_{\lambda_{k1},\lambda_{k2}}\rho\,\sigma G^{J,1/2,1/2}_{-\lambda_{k1},\lambda_{k1};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}[P_L(x)] + \delta_{\rho\lambda_{k1},\sigma\lambda_{k2}}G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}[P_L(x)]\right], \tag{29}$$

$$D^{J}_{\lambda,\lambda'}(\phi,\beta,-\phi)\,N_{k,k'}\bar{u}_{\lambda_{p1}}(p_1)u_{\lambda_{k1}}(k_1)\bar{u}_{\lambda_{p2}}(p_2)(\hat{p}_1+\hat{k}_1)u_{\lambda_{k2}}(k_2) = \sum_{\sigma,\rho=-1}^{1}W_{-\sigma\lambda_{k1},-\rho\lambda_{k2}}(k)\times$$

$$W_{\sigma\lambda_{p1},-\rho\lambda_{p2}}\left(k'\right)\left[k'\,\rho\,\lambda_{k2}(3\,G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}[xP_L(x)] - 2\,G^{J,1/2,3/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}[P_L(x)]) +\right.$$

$$\left.G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}[P_L(x)]\left\{\rho\left(3\lambda_{k2}k - 2\lambda_{p2}k'\right) - 3\left(\omega_{m1}(k)+\omega_{m1}\left(k'\right)\right)\right\}\right], \tag{30}$$

$$D^{J}_{\lambda,\lambda'}(\phi,\beta,-\phi)\,N_{k,k'}\bar{u}_{\lambda_{p1}}(p_1)(\hat{p}_2+\hat{k}_2)u_{\lambda_{k1}}(k_1)\bar{u}_{\lambda_{p2}}(p_2)u_{\lambda_{k2}}(k_2) = \sum_{\sigma,\rho=-1}^{1}W_{-\sigma\lambda_{k1},-\rho\lambda_{k2}}(k)\times$$

$$W_{-\sigma\lambda_{p1},\rho\lambda_{p2}}\left(k'\right)\Big[k'\sigma\lambda_{k1}(3\,G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}[xP_L(x)]-2\,G^{J,3/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}[P_L(x)])+$$

$$G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}[P_L(x)]\left\{\sigma\left(3\lambda_{k1}k-2\lambda_{p1}k'\right)-3\left(\omega_{m2}(k)+\omega_{m2}\left(k'\right)\right)\right\}\Big], \tag{31}$$

$$D^{J}_{\lambda,\lambda'}(\phi,\beta,-\phi)\,N_{k,k'}(p_1+k_1)^{\nu}(p_2+k_2)_{\nu}\bar{u}_{\lambda_{p1}}(p_1)u_{\lambda_{k1}}(k_1)\bar{u}_{\lambda_{p2}}(p_2)u_{\lambda_{k2}}(k_2)=$$

$$\sum_{\sigma,\rho=-1}^{1}W_{-\sigma\lambda_{k1},-\rho\lambda_{k2}}(k)\,W_{\sigma\lambda_{p1},\rho\lambda_{p2}}\left(k'\right)\Big[\Big(k'^2+k^2+\left(\omega_{m1}(k)+\omega_{m1}\left(k'\right)\right)\left(\omega_{m2}(k)+\omega_{m2}\left(k'\right)\right)\Big)\times$$

$$G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}[P_L(x)]+2k\,k'G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}[x\,P_L(x)]\Big], \tag{32}$$

где $x=\cos\beta$.

Вторая часть потенциала с использованием соотношений (9), (11) и (12) преобразуется к произведению с нулевыми компонентами токов:

$$V^{(B)}_{\lambda_{p1},\lambda_{p2}\;\lambda_{k1},\lambda_{k2}}(\mathbf{k}',\mathbf{k})=\frac{Z\alpha\,\Pi\left(\alpha,q^2\right)}{8\pi^2q^4}(\omega_{m1}(k')-\omega_{m1}(k))\times$$

$$(\omega_{m2}(k')-\omega_{m2}(k))N_{k,k'}\;J^{(0)}_{\lambda_{p1},\lambda_{k1}}(p_1,k_1)\,J^{(0)}_{\lambda_{p2},\lambda_{k2}}(p_2,k_2)\,. \tag{33}$$

Применяя метод базисных спиноров для расчета спинорной части (33) и методику, описанную выше, найдем, что

$$N_{k,k'}D^{J}_{\lambda,\lambda'}(\phi,\beta,-\phi)\,N_{k,k'}\;J^{(0)}_{\lambda_{p1},\lambda_{k1}}(p_1,k_1)\,J^{(0)}_{\lambda_{p2},\lambda_{k2}}(p_2,k_2)=$$

$$\frac{1}{4m_1\,m_2}\sum_{\sigma,\rho=-1}^{1}W_{-\sigma\lambda_{k1},-\rho\lambda_{k2}}(k)G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}[P_L(x)]\Big[4m_1\,m_2\,K^{(I)}(\tilde{q}^2)W_{-\sigma\lambda_{p1},-\rho\lambda_{p2}}\left(k'\right)-$$

$$2m_2\,K^{(II)}(\tilde{q}^2)W_{\sigma\lambda_{p1},-\rho\lambda_{p2}}\left(k'\right)\left(\omega_{m1}(k)+\omega_{m1}\left(k'\right)\right)-2m_1\,K^{(III)}(\tilde{q}^2)W_{-\sigma\lambda_{p1},\rho\lambda_{p2}}\left(k'\right)\times$$

$$(\omega_{m2}(k')+\omega_{m2}(k))+K^{(IV)}(\tilde{q}^2)W_{\sigma\lambda_{p1},\rho\lambda_{p2}}(k')(\omega_{m2}(k')+\omega_{m2}(k))(\omega_{m1}(k)+\omega_{m1}(k'))\Big], \tag{34}$$

где функции $K(\tilde{q}^2)$ определены уравнениями (18)–(19).

4. Структура ядра радиального уравнения. После расчета спинорной части, используя определение (4) и тривиальное интегрирование по азимутальному углу ϕ, получим ядро релятивистской фермион-фермионной системы в «L-S» базисе для произвольного полного углового момента J (полный спиновой момент $S=0,1$):

$$V^{J}_{L',S';L,S}(k',k)=\frac{\sqrt{(2L+1)(2L'+1)}}{2J+1}(-1)\frac{Z\,\alpha}{4\pi}\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1',\lambda_2'}C^{1/2\quad 1/2\quad S}_{\lambda_1/2\;-\lambda_2/2\;\lambda/2}C^{L\;S\;J}_{0\;\lambda/2\;\lambda/2}C^{1/2\quad 1/2\quad S'}_{\lambda_1'/2\;-\lambda_2'/2\;\lambda'/2}C^{L'\;S'\;J}_{0\;\lambda'/2\;\lambda'/2}\times$$

$$(V^{I}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2},\lambda_{p1},\lambda_{p2}}+V^{II}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2},\lambda_{p1},\lambda_{p2}}+V^{III}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2},\lambda_{p1},\lambda_{p2}}+V^{IV}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2},\lambda_{p1},\lambda_{p2}}+V^{(B)}_{\lambda_{p1},\lambda_{p2}\;\lambda_{k1},\lambda_{k2}}). \tag{35}$$

где слагаемые $V_{\lambda_{k1},\lambda_{k2},\lambda_{p1},\lambda_{p2}}$ определяются с помощью рассчитанных спинорных структур (30)–(32), (34):

$$V^{I}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2},\lambda_{p1},\lambda_{p2}}=2\sum_{\sigma,\rho=-1}^{1}W_{-\sigma\lambda_{k1},-\rho\lambda_{k2}}(k)\,W_{-\sigma\lambda_{p1},-\rho\lambda_{p2}}\left(k'\right)[\delta_{\lambda_{k1},\lambda_{k2}}\rho\,\sigma\times$$

$$G^{J,1/2,1/2}_{-\lambda_{k1},\lambda_{k1};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}\left[\tilde{R}^{(I)}_{L}\left(k,k'\right)\right]+\delta_{\rho\lambda_{k1},\sigma\lambda_{k2}}G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}\left[\tilde{R}^{(I)}_{L}\left(k,k'\right)\right]], \tag{36}$$

$$V^{II}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2},\lambda_{p1},\lambda_{p2}} = -\frac{1}{2\,m_1}\sum_{\sigma,\rho=-1}^{1} W_{-\sigma\lambda_{k1},-\rho\lambda_{k2}}(k)\,W_{\sigma\lambda_{p1},-\rho\lambda_{p2}}\left(k'\right)\Big[k'\,\rho\,\lambda_{k2}\times$$

$$\left(3\,G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}\left[\tilde{Z}^{(II)}(k',k)\right]-2\,G^{J,1/2,3/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}\left[\tilde{R}^{(II)}(k',k)\right]\right)+$$

$$G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}\left[\tilde{R}^{(II)}(k',k)\right]\left\{\rho\left(3\lambda_{k2}k-2\lambda_{p2}k'\right)-3\left(\omega_{m1}(k)+\omega_{m1}\left(k'\right)\right)\right\}\Big], \qquad (37)$$

$$V^{III}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2},\lambda_{p1},\lambda_{p2}} = -\frac{1}{2\,m_2}\sum_{\sigma,\rho=-1}^{1} W_{-\sigma\lambda_{k1},-\rho\lambda_{k2}}(k)\,W_{-\sigma\lambda_{p1},\rho\lambda_{p2}}\left(k'\right)\times$$

$$\Big[k'\sigma\lambda_{k1}\left(3\,G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}\left[\tilde{Z}^{(III)}(k',k)\right]-2\,G^{J,3/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}\left[\tilde{R}^{(III)}(k',k)\right]\right)+$$

$$G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}\left[\tilde{R}^{(III)}(k',k)\right]\left\{\sigma\left(3\lambda_{k1}k-2\lambda_{p1}k'\right)-3\left(\omega_{m2}(k)+\omega_{m2}\left(k'\right)\right)\right\}\Big], \qquad (38)$$

$$V^{IV}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2},\lambda_{p1},\lambda_{p2}} = \frac{1}{4\,m_1\,m_2}\sum_{\sigma,\rho=-1}^{1} W_{-\sigma\lambda_{k1},-\rho\lambda_{k2}}(k)\,W_{\sigma\lambda_{p1},\rho\lambda_{p2}}\left(k'\right)\Big[\Big(k'^2+k^2+\left(\omega_{m1}(k)+\omega_{m1}\left(k'\right)\right)\times$$

$$\left(\omega_{m2}(k)+\omega_{m2}\left(k'\right)\right)\Big)\,G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}\left[\tilde{R}^{(IV)}(k',k)\right]+2\,k\,k'G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}\left[\tilde{Z}^{(IV)}(k',k)\right]\Big], \qquad (39)$$

где дополнительная функция $\tilde{Z}$ задается формулой

$$\tilde{Z}_L(k',k)=\frac{1}{2L+1}\left[(L+1)\tilde{R}_{L+1}(k',k)+L\,\tilde{R}_{L-1}(k',k)\right], \qquad (40)$$

а функция $G^{J,s_1,s_2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}[f(x)]$ – уравнением (27).

Структура последнего слагаемого потенциала (35) определяется соотношением (34) и после интегрирования приобретает следующий вид:

$$V^{B}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2},\lambda_{p1},\lambda_{p2}} = \frac{1}{4\,m_1\,m_2}\sum_{\sigma,\rho=-1}^{1} W_{-\sigma\lambda_{k1},-\rho\lambda_{k2}}(k)[4m_1\,m_2\,G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}\left[\tilde{U}^{(I)}(k',k)\right]\times$$

$$W_{-\sigma\lambda_{p1},-\rho\lambda_{p2}}\left(k'\right)-2m_2\,G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}\left[\tilde{U}^{(II)}(k',k)\right]W_{\sigma\lambda_{p1},-\rho\lambda_{p2}}\left(k'\right)\left(\omega_{m1}(k)+\omega_{m1}\left(k'\right)\right)-$$

$$2m_1\,G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}\left[\tilde{U}^{(III)}(k',k)\right]W_{-\sigma\lambda_{p1},\rho\lambda_{p2}}\left(k'\right)\left(\omega_{m2}\left(k'\right)+\omega_{m2}(k)\right)+$$

$$G^{J,1/2,1/2}_{\lambda_{k1},\lambda_{k2};\lambda_{p1},\lambda_{p2}}\left[\tilde{U}^{(IV)}(k',k)\right]W_{\sigma\lambda_{p1},\rho\lambda_{p2}}\left(k'\right)\left(\omega_{m2}\left(k'\right)+\omega_{m2}(k)\right)\left(\omega_{m1}(k)+\omega_{m1}\left(k'\right)\right)\Big]. \qquad (41)$$

В соотношениях выше функции $\tilde{R}_\ell(k',k)$ и $\tilde{U}_\ell(k',k)$, входящие в (35), выражаются в виде одномерных интегралов:

$$\tilde{R}_\ell(k',k)=\int_{-1}^{1}\frac{K(\tilde{q}^2)P_\ell(x)}{q^2}\,dx\,,\;\; \tilde{U}_\ell(k',k)=\int_{-1}^{1}\frac{K(\tilde{q}^2)P_\ell(x)}{q^4}\,dx \qquad (42)$$

с подинтегральными выражениями, зависящими только от формфакторов $\Pi\left(\alpha,q^2\right)$, $F^{e,p}_{1,2}\left(q^2\right)$.

Заключение. Полученное ядро радиального уравнения (2) для произвольного полного углового момента J (полный спиновой момент $S=0{,}1$) автоматически учитывает эффекты отдачи и позволяет при вычислениях энергетических вкладов учесть релятивистские эффекты высших порядков, обусловленные движением фермионов. Предлагаемая методика может быть применена и для построения потенциала одноглюонного обмена без существенных дополнительных вычислений.

В частном случае, когда $m_1 = m_2$, лоренц-структуры $\gamma^{\mu} \otimes \gamma_{\mu}$, и $I \otimes I$ потенциала (35) совпадают с аналогичными структурами, полученными в [31]. При разложении по скоростям фермионов можно показать, что потенциал (35) переходит в сумму ядер нерелятивистского уравнения Шредингера и уравнения Брейта в импульсном представлении. Отметим, что ядро для двухфермионных систем с использованием импульсного представления в таком виде получено впервые.

Литература

1. *Pohl R.* [et al.] // Nature. 2010. Vol. 466. P. 231–216.
2. *De Rujula A.* // Phys. Lett. 2010. Vol. B693. P. 555–558.
3. *Jentschura U. D.* // [Electronic resource]. 2010. Mode of access: http:// arxiv. org/pdf/hep-ph /1011.5275. Date of access: 14.01.2011.
4. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика Москва, 1981.
5. *Пилькун Х.* Физика релятивистских частиц. М., 1983.
6. *Lucha W., Rupprecht H., Schoberl F. F.* // Phys. Rev. 1991. Vol. D44. P. 242–249.
7. *Богуш А. А., Федоров Ф. И.* // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-тэхн. навук. 1962. № 2. С. 26–38.
8. *Богуш А. А.* // Вести АН БССР. Сер. физ.-тех. наук. 1964. № 2. С. 29–38.
9. *Федоров Ф. И.* Группа Лоренца. М., 1974.
10. *Федоров Ф. И.* // Теор. и мат. физика. 1974. № 18. С. 329–339.
11. *Богуш А. А., Курочкин Ю. А., Федоров Ф. И.* // ДАН СССР. Физика. 1976. Т. 231, № 2. С. 312–315.
12. *Федоров Ф. И.* // Известия Вузов. Физика. 1980. № 2. С. 32–50.
13. *Сикач С. М.* // Весцi АН БССР. Сер. фiз-мат. навук. 1984. № 2. С. 84–93.
14. *Галынский М. В., Сикач С. М.* // ЭЧАЯ. 1998. Т. 29. С. 1133–1193.
15. *Андреев В. В.* // Ядерная физика. 2003. Т. 66, № 2. С. 410–420.
16. *Gromes D.* // Heidelberg, 1989. 64 P. Preprint Institute of Theor. Phys. HD-THEP-89–17.
17. *Galkin V. O., Mishurov A. Y., Faustov R. N.* // Sov. J. Nucl. Phys. 1992. Vol. 55. P. 1207–1213.
18. *Crater H. W., Wong C. W., Wong C.-Y.* // Int. J. Mod. Phys. 1996. Vol. E5. P. 589–616.
19. *Terekidi A. G., Darewych J. W.* // J. Math. Phys. 2005. Vol. 46. P. 032302.
20. *Godfrey S., Isgur N.* // Phys. Rev. 1985. Vol. D32. P. 189–231.
21. *Ebert D., Faustov R. N., Galkin V. O.* // Eur. Phys. J. 1999. Vol. C7. P. 539–542.
22. *Pauli H.-C.* // [Electronic resource]. 2003. Mode of access: http:// arxiv. org/pdf/hep-ph/0312300. Date of access: 14.01.2008.
23. *Bete H. A., Salpeter E. E.* // Phys. Rev. 1951. Vol. 84, № 2. P. 1232–1242.
24. *Eides M. I., Grotch H., Shelyuto V. A.* // Phys. Rept. 2001. Vol. 342. P. 63–261.
25. *Двоеглазов В. В., Тюхтяев Ю. Н., Фаустов Р. Н.* // ЭЧАЯ. 1994. Т. 25, № 1. С. 144–228.
26. *Faustov R. N., Karimkhodzhaev A., Martynenko A. P.* // Phys. Atom. Nucl. 1999. Vol. 62. P. 2103–2105.
27. *Faustov R. N., Martynenko A. P.* // Phys. Atom. Nucl. 1998. Vol. 61. P. 471–475.
28. *Kinoshita T.* // [Electronic resource]. 1998. Mode of access: http://arxiv.org/pdf/hep-ph/9808351. Date of access: 14.01.2008.
29. *Dirac P. A. M.* // Rev. of Modern Phys. 1949. Vol. 21. P. 392–399.
30. *Keister B. D., Polyzou W. N.* // Adv. Nucl. Phys. 1991. Vol. 20. P. 225–479.
31. *Браун Д. Е., Джексон А. Д.* Нуклон-нуклонные взаимодействия. М., 1979.
32. *Klink W. H.* // Few Body Syst. 2003. Vol. 33. P. 99–110.
33. *Андреев В. В.* Методы вычисления амплитуд в квантовополевых теориях и моделях. Гомель, 2004.
34. *Андреев В. В.* Пуанкаре-ковариантные модели двухчастичных систем с квантовополевыми потенциалами. Гомель, 2008.

V. V. ANDREEV

CALCULATION OF EQUATION KERNEL OF RELATIVISTIC TWO-FERMION SYSTEM

Summary

The kernel of the radial equation for the relativistic two-fermion system with arbitrary angular momentum was obtained. The procedure is based on the exact calculation of fermion elastic scattering amplitude being a part of the interaction potential definition.