

М. Н. ОГЮЗТОРЕЛИ (M. N. OĞUZTÖRELİ), Д. И. МАНЖЕРОН (D. J. MANGERON)

**СИСТЕМЫ ПОЛИНОМОВ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ —
ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ
САМОСОПРЯЖЕННЫХ ПОЛИВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ**

(Представлено академиком И. Н. Векун 31 V 1972)

1. В предыдущей заметке авторов ⁽¹⁾ были построены системы полиномов многих переменных, рассматриваемых как частные решения некоторого класса линейных поливолновых уравнений, характеризующихся присутствием дифференциальных операторов высшего порядка вида D_{km} , где D_m — оператор «полной производной» М. Пиконе ⁽²⁾,

$$D_m \equiv \frac{\partial^m}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}, \quad D_{km} = D_m D_{km-1}.$$

Поливолновые системы, для которых после установления энергетических неравенств и получения некоторых результатов по обобщенной разрешимости, были сформулированы вторым из авторов (Д.И.М.) более сорока лет тому назад различные граничные задачи ⁽³⁾, многогранно исследуются авторами ⁽⁴⁾, зачастую в рамках более обширных исследований, касающихся математических систем сложных структур ⁽⁵⁾, где одновременно с поливолновыми операторами фигурируют также и некоторые функциональные операторы, операторы наследственности ⁽⁶⁾, конечных разностей, запаздывающих или же опережающих аргументов ⁽⁷⁾ — в сотрудничестве с представителем киргизской школы по интегро-дифференциальным уравнениям Л. Е. Кривошеины ⁽⁸⁾.

Растущий интерес к этим новым «пеклассическим» граничным задачам, начатым авторами, как отмечает Ю. М. Березанский ⁽⁹⁾, даже несколько ранее, чем работы ⁽¹⁰⁻¹³⁾, касающиеся граничных задач для гиперболических уравнений второго порядка, и нашедшим уже ряд применений, например, в области автоматического проектирования поверхностей любой формы ⁽¹⁴⁾ или же в области аппроксимирования при помощи функций «spline» ⁽¹⁵⁾, привел авторов, в частности, к построению систем поливолновых полиномов, а затем и их нулей, возможных областей ортогональности при соответствующих весовых функциях и др. ⁽¹⁶⁾ *.

Ниже приводятся системы поливолновых полиномов — решений одного класса линейных самосопряженных поливолновых уравнений высшего порядка, причем алгоритмические детали, связь с классическими задачами и некоторые сопоставления с результатами, касающимися полигармонических полиномов, полиномов наилучшего приближения по многим переменным, многосмерных полиномов Эрмита, соответственно разработанными Б. А. Бондаренко ⁽¹⁷⁾, Д. Г. Гребенюком ⁽¹⁸⁾ и С. Х. Сираждиновым ⁽¹⁹⁾, будут помещены в более обширной статье в «Известиях Ясского политехнического института (Buletinul institutului politehnic din Iași)».

* Поливолновые уравнения были названы некоторыми авторами, как, например, Г. Биркгоффом, В. Горлоном и др., уравнениями Манжерона. Они послужили также тематикой некоторых докторских диссертаций ⁽²⁰⁾.

2. Имеет место следующий результат. Самосопряженные линейные поливолновые уравнения

$$D_{km}(F(x)D_{km}u(x)) + \lambda_{n,m;2k}u(x) = 0, \\ x = (x_1x_2, \dots, x_m), \quad D_{km} = \frac{\partial^{km}}{\partial x_1^k \partial x_2^k \dots \partial x_m^k}, \quad (2,1)$$

допускают, при

$$F(x) = a_{2k,m}\theta_m^{2k} + a_{2k-1,m}\theta_m^{2k-1} + a_{0,m}, \quad \theta_m = \prod_i^{1,m} x_i, \quad (2,2)$$

где постоянные коэффициенты $a_{2k,m}$, $a_{2k-1,m}$, ..., $a_{0,m}$ не зависят от n , а

$$\lambda_{n,m;2k} = -a_{2k,m}(n+k)^m(n+k-1)^m \dots (n-k+1)^m \quad (2,3)$$

и

$$P_{n,m} = a_{n,n}\theta_m^n + a_{n,n-1}\theta_m^{n-1} + \dots + a_{n,0}, \quad a_{n,n} \neq 0, \quad (2,4)$$

полиномиальные решения вида

$$\frac{1}{a_{n,n}}P_{n,m;2k}(\theta_m) = \theta_m^n - \sum_{l=-(2k-1)}^{n-2k} (\lambda_{n,m;2k} + \lambda_{n,m;2k;l})^{-1} \theta_m^{n-2k-l} a_{p,m} \times \\ \times \left\{ \sum_{p=0}^k a_{p,m} \frac{a_{n,n-l-p}}{a_{n,n}} A_{p;k,l,n,m} + B_{k,l,m,n} \sum_{s=0}^{k-1} a_{k+s,m} \frac{a_{n,n-l-k-s}}{a_{n,n}} C_{s;k,l,m,n} \right\}, \quad (2,5)$$

причем

$$\lambda_{n,m;2k;l} = a_{2k,m}(n-k-l)^m(n-k-l-1)^m \dots (n-3k-l+1)^m, \\ A_{p;k,l,m,n} = (n-l-p)^m(n-l-p-1)^m \dots (n-l-2k+1)^m \times \\ \times (n-l-k)^m(n-l-k-1)^m \dots (n-l-k-p+1)^m, \quad (2,6) \\ B_{k,l,m,n} = (n-l-k)^m(n-l-k-1)^m \dots (n-l-2k+1)^m, \\ C_{s;k,l,m,n} = (n-l-k-s)^m(n-l-k-s-1)^m \dots (n-l-2k-s+1)^m.$$

При $m=1$ и соответствующем выборе коэффициентов (2,2) получают, конечно, различные классические полиномы, в частности полиномы Лежандра.

Авторы не приводят здесь соответствующие поливолновым уравнениям (2,1) обыкновенные дифференциальные уравнения, допускающие при тех же $\lambda_{n,m;2k}$ те же полиномиальные решения (2,5) с той лишь разницей, что в них вместо $\theta_m = x_1x_2 \dots x_m$ записывается просто переменная $t (= x)$. Результаты, относящиеся к этой идее, изложены нами в работе ⁽¹⁾ для рассмотренных в ней уравнений.

Университет провинции Альберта
Эдмонтон, Канада

Поступило
6 IV 1972

Ясский политехнический институт
Социалистическая Республика Румыния

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Н. Огюзторели, Д. И. Манжерон, ДАН, 196, № 2, 293; № 3, 523 (1971). ² M. Picone, La mia vita, Annuario Dell'Accademia dei, Roma, 40, 1972. ³ D. Mangeron, Rend. accad. naz. dei Lincei, 6, 16, 305 (1932); Rend. accad. sci. fis., mat., Napoli, 4, 2, 29 (1932); Giorn. mat. Battaglini, Napoli, 71, 89 (1933). ⁴ D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, Proc. nat. acad. sci., U.S.A., 67, 1488 (1970); Bull. R.

acad. sci. Belgique, 5, 56, 267 (1970). ⁵ M. N. Oğuztöreli, D. Mangeron, Rend. acad. sci. fis., mat., Napoli, 4, 37, 107, 113 (1970); Bull. Polytechnic inst. Jassy, 20, 3—4, 9 (1970). ⁶ M. N. Oğuztöreli, I. D. Mangeron, C. R. 271A, 309 (1970). ⁷ D. Mangeron, M. N. Oğuztöreli, et al., Rend. acad. naz. dei Lincei, Roma, 8, 48, 160 (1970). ⁸ D. Mangeron, L. E. Krivosheina, Rend. sem. mat. univ. Padova, 33, 226 (1963); 34, 344 (1964); 35, 341 (1965). ⁹ Ju. M. Berezanski. Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint operators. Am. Math. Soc. Transl. Monographs, 1968, ch. IV, pp. 756, 787. ¹⁰ J. Hadamard, L'ens. Math., 35, 25 (1936). ¹¹ A. Huber, Mh. Math. U. Phys., 39, 79 (1932). ¹² D. G. Bourgin, R. Duffin, Bull. Amer. Soc., 45, 851 (1939). ¹³ F. John, Amer. J. Math., 63, 1, 141 (1941). ¹⁴ G. Birkhoff, В сборн. Approximations with special Emphasis on spline functions, N. Y., 1969, p. 209. ¹⁵ W. Gordon, ibid., pp. 236, 276. ¹⁶ D. Mangeron, L. E. Krivosheina, M. N. Oğuztöreli, Rev. Roumaine sci., techn., serie mec. appl., 9, 1195 (1964); 10, 3 (1965); 11, 3 (1966); 14, 1969. ¹⁷ Б. А. Бондаренко, Полигармонические полиномы, Ташкент, 1968. ¹⁸ Д. Г. Гребенюк, Полиномы наилучшего приближения по многим переменным, Ташкент, 1970. ¹⁹ С. Х. Сираждинов, Тр. Инст. математики и механики АН УзССР, в. 5, 70 (1949). ²⁰ S. Easwaran, A study on certain higher order partial differential equations of Mangeron. Doctoral dissertation, univ. of Alberta, dept. math., 1972.