

УДК 517.52

МАТЕМАТИКА

А. И. ПАВЛОВ

**О РОСТЕ ПО КРИВЫМ РЯДОВ С ПРОПУСКАМИ И РЯДОВ
С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ,
РЕДКО МЕНЯЮЩИМИ ЗНАК**

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 23 II 1972)

1. Пусть целая аналитическая функция $f(z)$ задается рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}, \quad (1)$$

где $a_n \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $\{\lambda_n\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел.

Т. Ковари (1) доказал, что если $\lambda_n > n(\ln n)^{2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $n > n_0(\varepsilon)$, то

$$\ln m(r, f) > (1 - \delta_1) \ln M(r, f), \quad (2)$$

$$m(r, f) = \min_{|z|=r} |f(z)|, \quad M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

для любого фиксированного $\delta_1 > 0$ и любого $r > 0$, кроме множества конечной логарифмической меры, т. е. такого множества S значений r , что

$$\int_S \frac{dt}{t} < \infty.$$

Если числа λ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, удовлетворяют условию

$$\ln p_n = o\left(\frac{\lambda_n}{\varphi(\ln \lambda_n)}\right), \quad p_n = \prod_{k \neq n} \frac{\lambda_n + \lambda_k}{|\lambda_n - \lambda_k|},$$

где $\varphi(x)$ — положительная, возрастающая, определенная на $[0, \infty)$ функция и такая, что

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\varphi(x)} < \infty,$$

то, как доказали Андерсон и Бинмор (2),

$$\ln |f(z)| > (1 - \delta_2) \ln M(r, f), \quad z \in \Gamma, \quad r = |z|, \quad (3)$$

где $\delta_2 > 0$ любое и фиксировано, $r > 0$ и $r \notin S$, Γ — любая непрерывная кривая, уходящая в бесконечность.

В статье изучается вопрос о получении оценок типа (2) и (3) для функций вида (1) при условиях, наложенных на последовательность $\{\lambda_n\}$, близких к минимальным.

Теорема 1. Если последовательность натуральных чисел $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условиям (4а) и (4б), где

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty, \\ \text{б)} \quad & \frac{\lambda_{n+1}}{n+1} \geq \frac{\lambda_n}{n}, \end{aligned} \quad (4)$$

в) существует непрерывно-дифференцируемая на $(0, \infty)$ функция $N_1(x)$ такая что $N(x) < N_1(x)$ и $e^{-x}N_1(e^x)$ выпукла книзу, где $N(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} 1$,

то для целой функции $f(z)$, задаваемой рядом (1), имеет место равенство

$$\overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \Gamma}} \frac{\ln |f(z)|}{\ln M(|z|, f)} = 1$$

для любой непрерывной кривой Γ , уходящей в бесконечность.

Заметим, что, согласно (3), для каждой последовательности натуральных чисел $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющей условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty,$$

существует целая функция вида (1), ограниченная на положительной части вещественной оси.

2. Для рядов с конечным радиусом сходимости может быть доказано утверждение, аналогичное теореме 1.

Теорема 2. Пусть функция $f(z)$ в круге $|z| < 1$ разлагается в ряд вида (1), причем последовательность $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условиям (4).

Тогда если

$$\int_{\sqrt{\ln M(r, f)}}^{\infty} \frac{N_1(t)}{t^2} dt < C(1-r)^{\gamma}, \quad 0 < r < 1, \quad (5)$$

(γ и C — не зависящие от r постоянные, причем $C > 0$, $\gamma > 4$), то

$$\overline{\lim}_{\substack{|z| \rightarrow 1- \\ z \in \Gamma}} \frac{\ln |f(z)|}{\ln M(r, f)} = 1,$$

где Γ — произвольная непрерывная кривая, соединяющая начало и окружность $|z| = 1$.

Заметим, что условие (5) фактически эквивалентно тому, что $M(r, f)$ при $r \rightarrow 1$ достаточно быстро стремится к бесконечности, так как из (5) следует

$$\int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{N_1(t)}{t^2} dt < \infty.$$

Андерсон (4) доказал, что если функция $f(z)$ представляется в круге $|z| < 1$ рядом вида (1), последовательность натуральных чисел $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}} < \infty, \quad \prod_{k \neq n} \frac{\lambda_n^{\alpha} + \lambda_k^{\alpha}}{|\lambda_n^{\alpha} - \lambda_k^{\alpha}|} = O(\lambda_n^{\epsilon})$$

($1/2 \leq \alpha < 1$; $\varepsilon > 0$ и не зависит от α, n, r ; постоянная в O абсолютная), и если

$$M(r, f) > (1-r)^{-\gamma}, \quad \text{постоянная } \gamma > 2,$$

то функция $f(z)$ не ограничена на любой кривой, соединяющей начало с окружностью $|z| = 1$.

3. Определение. Последовательность натуральных чисел $\{\lambda_n\}$ называется последовательностью перемен знака заданной последовательности вещественных чисел $\{a_n\}$, если

$$a_{\lambda_n} \cdot a_{\lambda_{n'}} < 0,$$

где $\lambda_{n'}$ — наибольшее среди тех $k < \lambda_n$, для которых $a_k \neq 0$.

Теорема 3. Пусть целая функция $f(z)$ задается рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (6)$$

с вещественными коэффициентами, и пусть, далее, последовательность $\{\lambda_n\}$ является последовательностью перемен знака последовательности $\{a_n\}$.

Тогда, если числа $\{\lambda_n\}$ удовлетворяют условиям (4а) и (4б), то

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(x)|}{\ln M(x, f)} = 1, \quad x > 0.$$

Эдрей ⁽⁵⁾ доказал, что для целых функций $f(z) \neq C$ вида (6) из (4а) следует

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \infty$$

и что для любой последовательности натуральных чисел $\{\lambda_n\}$, для которой (4а) не выполняется, существует ограниченная на положительном луче целая функция с вещественными коэффициентами Тейлора a_n , имеющими своей последовательностью перемен знака последовательность $\{\lambda_n\}$.

Теорема 4. Пусть функция $f(z)$ в круге $|z| < 1$ представляется рядом вида (6) с вещественными коэффициентами a_n .

Тогда, если последовательность $\{\lambda_n\}$ перемен знака последовательности $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям (4), то из (5) следует

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 1-} \frac{\ln |f(x)|}{\ln M(x, f)} = 1, \quad x > 0.$$

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
15 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ T. Kövari, Michigan Math. J., 12, № 2 (1965). ² J. M. Anderson, K. G. Binmore, Proc. London Math. Soc. (3), 18 (1968). ³ A. J. Macintyre, Proc. London Math. Soc., (3), 2 (1952). ⁴ J. M. Anderson, Quart. J. Math., 21, 82 (1970). ⁵ A. Edrei, Scripta Math., 23 (1957).