

В. П. ПАЛАМОДОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ ВЕРСАЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ КОМПЛЕКСНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 25 V 1972)

1°. Мы будем говорить о локальных деформациях комплексных пространств и ростков таких пространств. Пусть X — (банахово) комплексное пространство. Под ростком комплексного пространства на X мы понимаем следующее: рассмотрим категорию пар (Y, i) , где $i: X \rightarrow Y$ — замкнутое вложение комплексных пространств. Скажем, что пары (Y, i) и (Y', i') имеют одинаковые ростки на X , если существует окрестность $V \supset i(X)$, окрестность $V' \supset i'(X)$ и изоморфизм $j: V \rightarrow V'$ такой, что $ji = i'$. Всякий класс эквивалентных в этом смысле пар назовем ростком на X и обозначим символом вида $\mathcal{U}_X$. В частности, само пространство X является ростком на себе. Ростки пространства и ростки морфизмов на X (определяемые аналогично) образуют категорию.

Пусть S_* — росток комплексного пространства на простой точке, обозначаемой $*$. Локальная деформация X с базой S_* есть по определению росток $\mathcal{X}_X$ на X , снабженный плоским морфизмом ростков $\mathcal{X}_X \rightarrow S_*$. Множество деформаций X с базой S_* обозначим через $\text{Def}(S_*)$. Этот символ является контравариантным функтором на категории ростков (банаховых) комплексных пространств на $*$.

Символом $* \rightarrow$ обозначим двойную точку, т. е. $\text{Spec } C[t]/[t^2]$. Множество $\text{Def}(* \rightarrow)$ имеет структуру векторного пространства над C (см. напр., ⁽¹⁾) и для любой деформации $d \in \text{Def}(S_*)$ линейно отображение $T(S_*) = \text{Hom}(* \rightarrow, S_*) \rightarrow \text{Def}(* \rightarrow)$, относящее касательному к S_* вектору ограничение деформации d на этот вектор (обобщенное отображение Кодaira — Спенсера).

В соответствии со стандартной терминологией (ср. ⁽¹⁾) деформацию $e \in \text{Def}(V_*)$ назовем версальной, если для любого ростка S_* , его подростка T_* , деформации $d \in \text{Def}(S_*)$ и морфизма $t: T_* \rightarrow V_*$ такого, что $t^*(e) = d|T_*$, существует морфизм $s: S_* \rightarrow V_*$, равный t на T_* , такой, что $s^*(e) = d$. Деформация e универсальна, если вместе с тем морфизм s единствен. Наша теорема существования такова:

Теорема 1. Если $\text{red } X$ имеет структуру алгебраического пространства (см. ⁽²⁾), то существует версальная деформация X , для которой обобщенное отображение Кодaira — Спенсера есть изоморфизм. Если к тому же нетривиальные инфинитезимальные автоморфизмы X отсутствуют, то эта деформация универсальна.

Этот результат обобщается при рассмотрении деформаций ростков. Деформацией ростка $\mathcal{U}_X$ с базой S_* мы называем росток $\mathcal{X}_X$, снабженный вложением ростков $j: \mathcal{U}_X \rightarrow \mathcal{X}_X$ и плоским морфизмом $p: \mathcal{X}_X \rightarrow S_*$ таким, что $\text{Im } j = p^{-1}(*)$. Понятие версальной деформации в этом случае аналогично предыдущему.

Теорема 2. Росток комплексного пространства $\mathcal{U}_X$ имеет версальную деформацию, для которой обобщенное отображение Кодaira — Спенсера есть изоморфизм, если 1) в $\text{red } X$ существует структура алгебраического пространства, 2) росток $\mathcal{U}_X$ конечномерен, гладок вне X и существует

зует росток непрерывной функции на $\mathcal{U}_x$, равной нулю на X , положительной и строго плюрисубгармонической на дополнении к X .

Второе условие обеспечивает конечномерность пространства $\text{Def}(* \rightarrow)$ и, следовательно, базы этой версальной деформации.

В случае, когда X — точка, деформации ростка изучались Грауэртом и Кернером ⁽³⁾ (условие жесткости), существование версальной деформации было установлено М. Шлессингером ⁽⁴⁾ (полное пересечение), Г. Н. Тюриной ⁽⁵⁾ (росток приведен и подчинен некоторым дополнительным ограничениям, снятым впоследствии), Грауэртом ⁽⁶⁾ (росток приведен) и И. Ф. Дониным в общем случае. Известная теорема Кураниши ⁽⁷⁾ * утверждает существование версальной деформации для любого компактного пространства без особых точек; в то же время и теорема 1 не покрывает результата Кураниши, поскольку не всякое компактное комплексное пространство имеет структуру алгебраического пространства.

2°. Инварианты функтора деформаций X зависят от трех когерентных пучков на X : касательный пучок $\mathcal{T}^0$ — его сечения являются инфинитезимальными автоморфизмами X , пучок $\mathcal{T}^1$, слой которого в точке x есть множество деформаций ростка X_x над двойной точкой, и пучок $\mathcal{T}^2$, слой которого содержит препятствия к инфинитезимальным продолжениям деформаций ростка X_x .

Имеется точная последовательность когерентных пучков на X $0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(\Omega, \mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{T}^1 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}}^2(\Omega, \mathcal{O})$, где Ω — пучок дифференциальных форм, слой пучка $\mathcal{N}$ в точке x равен $\text{Hom}_{\mathcal{O}_x}(I'/I^2, \mathcal{O}_x)$, где I — ядро эпиморфизма некоторой регулярной аналитической алгебры H на $\mathcal{O}_x$, I' — идеал в H , образованный элементами $f \in I$ такими, что $\delta(f) \in I$ для любого дифференцирования δ в H . Если X приведено, то, очевидно, $\mathcal{N} = 0$, откуда $\mathcal{T}^1 = \text{Ext}^1(\Omega, \mathcal{O})$ (ср. ⁽³⁾ и ⁽⁵⁾).

Пучок $\mathcal{T}^2$, также являющийся инвариантом X , мы определяем, используя специальную конструкцию свободной H -резольвенты $\mathcal{O}_x$, принадлежащую Г. Н. Тюриной. Первые члены этой резольвенты строятся так: выбирается морфизм $d_1: L_1 \rightarrow H$, образ которого равен I (все L_i — свободные H -модули). Следующий морфизм является прямой суммой морфизма $d_1: \Lambda^2 L_1 \rightarrow L_1$ и некоторого морфизма $d_2: L_2 \rightarrow L_1$. За ним следует прямая сумма морфизма $d_1: \Lambda^3 L_1 \rightarrow \Lambda^2 L_1$, морфизма $L_2 \otimes_H L_1 \rightarrow \Lambda^2 L_1 \otimes L_2$ с компонентами $d_2 \wedge 1$ и $1 \otimes d_1$ и некоторого морфизма $L_3 \rightarrow \Lambda^2 L_1 \otimes L_2$ с компонентами s и d_3 . Так как $\text{Hom}(d_1, \mathcal{O}_x) = 0$, морфизмы $\text{Hom}(d_2, \mathcal{O}_x)$ и $\text{Hom}(d_3, \mathcal{O}_x)$ образуют комплекс, гомотопия которого есть по определению $\mathcal{T}^2$. Из конструкции видно, что $\mathcal{T}^2_x = 0$, если X_x есть полное пересечение.

Имеется два рода препятствий к инфинитезимальным продолжениям деформаций всего пространства X (или ростка). Препятствия локального характера возникают из-за препятствий к продолжениям деформаций ростков X_x в каждой точке $x \in X$ и принимают свои значения в $H^0(X, \mathcal{T}^2)$. Если локальное препятствие равно нулю, то определено глобальное препятствие, принимающее свои значения в некотором векторном пространстве Ex^2 , которое вместе с $\text{Ex}^1 = \text{Def}(* \rightarrow)$ может быть вычислено из точной последовательности

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(X, \mathcal{T}^0) \rightarrow \text{Ex}^1 \rightarrow H^0(X, \mathcal{T}^1) \rightarrow H^2(X, \mathcal{T}^0) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ex}^2 \rightarrow H^1(X, \mathcal{T}^1) \rightarrow H^3(X, \mathcal{T}^0). \end{aligned}$$

В частности: если X — многообразие, то $\text{Ex}^2 = H^2(X, \mathcal{T}^0)$ есть пространство препятствий в теореме Кураниши.

* В упомянутых работах понятие версальной деформации несколько иное: выполнение условия версальности требуется лишь в случае $T_* = *$.

3°. Метод доказательства теоремы 1 заключается в следующем: выбирается специальное штейново покрытие $\{X_\alpha\}$ пространства X и для каждого α — собственное вложение окрестности $\bar{X}_\alpha$ в C^n такое, что X_α является прообразом единичного полидиска U_α ; аналогичное вложение подбирается для всех областей $X_\alpha \cap X_\beta$, $X_\alpha \cap X_\beta \cap X_\gamma$ и т. д. Задача сводится к решению некоторой функциональной системы уравнений относительно степенных рядов на Ex^1 , коэффициенты которых являются сечениями некоторых свободных пучков на U_α , $U_{\alpha\beta}$, $U_{\alpha\beta\gamma}$ (или принадлежат C^m). В этих степенных рядах предписаны свободные члены, отвечающие структуре исходного пространства X , а также линейные члены в соответствии с условием, что отображение Кодаира — Спенсера является изоморфизмом.

Коэффициенты этих степенных рядов находятся последовательно, что соответствует продолжению деформации с одной инфинитезимальной окрестности точки в базе на следующую. При этом одновременно определяются сами эти инфинитезимальные окрестности. В техническом отношении этот процесс происходит так: если на $k-1$ шаге определены члены до порядка $k-1$, а затем преодолены локальные препятствия к следующему шагу, то главный член невязки в уравнениях определяет однородный многочлен k -го порядка со значениями в группе двумерных коциклов в некотором комплексе E , образованном сечениями когерентных пучков на U_α , $U_{\alpha\beta}$, $U_{\alpha\beta\gamma}$ и т. д. В то же время искомые члены k -го порядка в решении отвечают однородному многочлену со значениями в двумерной группе кограниц в том же комплексе. Двумерная же когомология этого комплекса есть Ex^2 . Следующая k -я инфинитезимальная окрестность в базе определяется так, чтобы на ней возникшее препятствие обратилось в нуль.

При проверке версальности построенной так деформации также используется комплекс E , однако в этом случае аналогичным процессом управляет его одномерная когомология Ex^1 . Универсальность зависит от нульмерной когомологии, равной $H^0(X, \mathcal{F}^0)$.

4°. Доказательство сходимости этого процесса проводится по следующей схеме. Для сечений свободных пучков на единичном полидиске U в C^n вводится последовательность норм

$$\|f\|_k^2 = \sum_{i_m \leq 2} \int_U |D_1^{i_1} \dots D_n^{i_n} f|^2 \rho^{2k} dv, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где D_m — дифференцирования в C^n , dv — форма объема, а $\rho(z) = \min(1, \text{dist}(z, \partial U)B)$, где B достаточно велико. Для этого спектра норм выполнены неравенства: а) $\|fg\|_{k+l} \leq C\|f\|_k \cdot \|g\|_l$; б) $\|D_m f\|_{k+l} \leq Ck\|f\|_k$, если правые части имеют смысл, причем константа C не зависит от k ; а также свойство в) если f — когомологичный нулю элемент комплекса E , обладающий конечной нормой $\|f\|_k$, то существует ограничивающий его элемент g такой, что $\|g\|_k \leq C\|f\|_k$, где C снова не зависит от k .

Чтобы установить сходимость решения, записанного в виде $\sum f_k$, где f_k — однородный многочлен k -го порядка, подбирается сходящийся степенной ряд $M = \sum M_k t^k$ такой, что при каждом k верхняя грань нормы $\|f_k\|_k$, взятая по единичному шару в Ex^1 , не превосходит M_k . Благодаря а), б) и в), такой ряд M находится как решение функционального уравнения, имитирующего исходную систему уравнений.

5°. Основная аналитическая трудность состоит в доказательстве пункта в). Оно использует специальное свойство покрытия, которое заключается в следующем. Скажем, что область Y в X есть специальный полиэдр по отношению к когерентному пучку $\mathcal{F}$, если фиксирована стратификация $X = X^n \supset X^{n-1} \supset \dots$ такая, что при любом k $X^k \setminus X^{k-1}$ есть многообразие и пучок $\mathcal{F}$ нормально плоский на $X^k \setminus X^{k-1}$, а Y принадлежит некоторой штейновой области $V \subset X$ и задается неравенствами $|f_j| < a_j$, $j = 1, \dots$

..., N , где $(f_1, \dots, f_N): V \rightarrow C^N$ — некоторое собственное голоморфное отображение, для которого выполнено условие*:

при любом k в каждой точке $x \in (X^k \setminus X^{k-1}) \cap \partial Y$, где $|f_{j_1}| = a_{j_1}, \dots, |f_{j_m}| = a_{j_m}$, дифференциалы $df_{j_1}, \dots, df_{j_m}$ линейно независимы на $X^k \setminus X^{k-1}$.

От покрытия $\{X_\alpha\}$ требуется, чтобы все области X_α , $X_\alpha \cap X_\beta$, $X_\alpha \cap X_\beta \cap X_\gamma$ и т. д. были специальными полиэдрами по отношению к пучкам $\mathcal{O}$, $\mathcal{F}^0$, $\mathcal{F}^1$, $\mathcal{F}^2$. Доказательство существования такого покрытия (которое проводится для любых когерентных пучков), основано на геометрических свойствах алгебраического пространства, найденных в работах Б. Г. Мойшезона⁽⁸⁾ (который изучал их как пространства с максимальным числом алгебраически независимых мероморфных функций) и М. Артина⁽²⁾. Используемая в этом доказательстве информация о геометрии X является единственной причиной необходимости условия алгебраичности в теоремах 1 и 2. Нет оснований полагать, что эти теоремы неверны в общем случае.

Примечание при корректуре. Описанный метод позволяет получить теорему 1 в усиленной форме. Именно: *версальная деформация существует для любого компактного комплексного пространства, у которого множество особых точек имеет структуру алгебраического пространства.* Этот результат охватывает упомянутую теорему Кураниши.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Шлезингер, Сборн. переводов: Математика, 15, № 4, 115 (1971).
² М. Артин, УМН, 26, № 1, 181 (1971). ³ H. Grauert, H. Kerner, Math. Ann., 153, 236 (1964). ⁴ M. Schlessinger, Thesis, Harvard Univ. Cambridge, Mass. (1964). ⁵ Г. Н. Тюрпина, Изв. АН СССР, сер. матем., 33, 1026 (1969). ⁶ H. Grauert, Invent. Math., 15, № 3, 171 (1972). ⁷ M. Kuranishi, Ann. Math., 75, 536 (1962). ⁸ Б. Г. Мойшезон, Изв. АН СССР, сер. матем., 31, 1385 (1967).
⁹ A. Douady, Ann. Inst. Fourier, 16, № 1 (1966).

* Отмечу, что эти условия обеспечивают также $\mathcal{F}$ -привилегированность Y в смысле А. Дуади⁽⁹⁾.