

УДК 539.12

В. В. АНДРЕЕВ, А. М. СЕЙТЛИЕВ

ОПИСАНИЕ КОМПТОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ МЕТОДОМ ИНВАРИАНТНЫХ АМПЛИТУД

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

(Поступила в редакцию 17.12.2010)

Введение. Изучение двухчастичных процессов взаимодействия, в частности, комптоновского рассеяния на фермионах, имеет долгую историю. В настоящее время изучение таких процессов позволяет исследовать такие структурные характеристики элементарных частиц, как электрическую α и магнитную β поляризуемости, а также впервые введенную в работах [1, 2] гирацию, которая позже получила название спиновой поляризуемости [3].

Важным моментом в таких исследованиях является получение инвариантных амплитуд комптоновского рассеяния, которые непосредственно связаны с вышеуказанными структурными характеристиками. В данной работе предлагается методика извлечения инвариантных амплитуд путем сравнения общего матричного элемента и матричных элементов, рассчитанных в различных квантово-полевых теориях и моделях. Вычислительной основой данной методики является расчет матричных элементов, как явно скалярных функций.

Существуют многочисленные методы получения матричных элементов в той или иной форме: метод Богуша–Федорова [4, 5], метод ДСБ [6], спинорная техника и др. В данной работе используется метод базисных спиноров, который позволяет получить матричные элементы реакций взаимодействия элементарных частиц для произвольных значений спиновых переменных (спиральностей), а также произвольной поляризации [7].

Процедура сравнения общего матричного элемента комптоновского рассеяния, вычисленного в терминах инвариантных амплитуд, и матричных элементов, рассчитанных в моделях, позволяет найти явный вид последних.

1. Метод базисных спиноров (МБС). Суть метода базисных спиноров состоит в сведении матричных элементов реакций элементарных частиц к явно скалярным функциям. Если ввести ортонормированный базис 4-векторов, который удовлетворяет следующим соотношениям:

$$l_0^\mu \cdot l_0^\nu - l_1^\mu \cdot l_1^\nu - l_2^\mu \cdot l_2^\nu - l_3^\mu \cdot l_3^\nu = g^{\mu\nu}, \quad (l_A \cdot l_B) = g_{AB},$$

где $g^{\mu\nu}$ представляет собой метрический тензор, то при помощи векторов l_A ($A = 0, 1, 2, 3$) можно определить векторы b_ρ и n_λ , образующие изотропную тетраду в пространстве Минковского:

$$b_\rho = (l_0 + \rho l_3) / 2, \quad n_\lambda = (\lambda l_1 + i l_2) / 2, \quad (\rho, \lambda = \pm 1). \quad (1)$$

Данные векторы также обладают следующими свойствами:

$$(b_\rho \cdot b_{-\lambda}) = \frac{\delta_{\lambda, \rho}}{2}, \quad (n_\lambda \cdot n_{-\rho}) = \frac{\delta_{\lambda, \rho}}{2}, \quad (b_\rho \cdot n_\lambda) = 0, \\ g^{\mu\nu} = 2 \sum_{\lambda=-1}^1 \left[b_\lambda^\mu \cdot b_{-\lambda}^\nu + n_\lambda^\mu \cdot n_{-\lambda}^\nu \right]. \quad (2)$$

При помощи изотропной тетрады векторов b_ρ, n_λ можно определить базисные спиноры $u_\lambda(b_{-1})$ и $u_\lambda(b_1)$:

$$\begin{aligned}\hat{b}_{-1}u_\lambda(b_{-1}) &= 0, \quad u_\lambda(b_1) \equiv \hat{b}_1 u_{-\lambda}(b_{-1}), \\ \omega_\lambda u_\lambda(b_{\pm 1}) &= u_\lambda(b_{\pm 1}),\end{aligned}\quad (3)$$

где $\omega_\lambda = 1/2(1 + \lambda\gamma_5)$. При этом справедливо следующее условие нормировки:

$$u_\lambda(b_{\pm 1})\bar{u}_\lambda(b_{\pm 1}) = \omega_\lambda \hat{b}_{\pm 1}.$$

Относительная фаза между базисными спинорами различной спиральности определяется выражением:

$$\hat{n}_\lambda u_{-\nu}(b_{-1}) = \delta_{\lambda,\nu} u_\lambda(b_{-1}). \quad (4)$$

Построенные базисные спиноры образуют полный набор:

$$\sum_{\lambda, A=-1}^1 u_\lambda(b_A)\bar{u}_{-\lambda}(b_{-A}) = I$$

и таким образом произвольный спинор можно разложить по базисным спинорам $u_\lambda(b_A)$.

Дираковские спиноры $w_\lambda^A(p, s_p)$ для массивных фермионов и антифермионов с 4-импульсом p и произвольным вектором поляризации s_p в терминах базисных спиноров записываются в виде [7]:

$$w_\lambda^A(p, s_p) = \frac{(\hat{p} + Am_p)(1 + \lambda\gamma_5\hat{s}_p)}{2\sqrt{(b_{-1} \cdot (p + m_p s_p))}} u_{-A \times \lambda}(b_{-1}). \quad (5)$$

Обозначение $w_{\lambda_p}^A(p, s_p)$ соответствует либо $u_{\lambda_p}(p, s_p)$ (биспинор фермиона; $A = +1$), либо $v_{\lambda_p}(p, s_p)$ (биспинор антифермиона; $A = -1$).

При помощи соотношений (1), (2) и (4) можно выразить действие матриц Дирака на базисные спиноры:

$$\gamma^\mu u_\lambda(b_A) = \tilde{b}_A^\mu u_{-\lambda}(b_{-A}) - A \tilde{n}_{-A \times \lambda}^\mu u_{-\lambda}(b_A). \quad (6)$$

Используя соотношения (3), (5), (6), матричный элемент $\bar{u}_{\lambda_p}(p)\gamma^\mu \dots u_{\lambda_k}(k)$ можно рассчитать в терминах скалярных физических векторов и векторов изотропной тетрады (1).

2. Кинематика комптоновского рассеяния. Реакция комптоновского рассеяния может быть записана следующим образом:

$$\gamma(k, \sigma) + e^-(p, \lambda) \longrightarrow \gamma(k', \sigma') + e^-(p', \lambda'),$$

где p и p' – это импульсы начального и конечного электронов со спиральностями λ, λ' соответственно; k и k' – импульсы входящего и исходящего фотонов со спиральностями σ, σ' .

Для описания кинематики реакции была выбрана система центра инерции (СЦИ). Кинематика в такой системе задается при помощи энергии одной из частиц и угла рассеяния в соответствующей плоскости. Если мы представим переменные подобным образом, то справедливы следующие соотношения:

$$E_e = \sqrt{E_\gamma^2 + m_e^2}, \quad \beta = E_\gamma / E_e,$$

где E_γ – энергия фотона, E_e – энергия электрона, β – скорость электрона.

Выбрав в качестве направления движения пучка ось Z и плоскость $X-Z$, как плоскость рассеяния, можно показать, что компоненты 4-вектора импульса имеют следующий вид:

$$p = E_e(1, 0, 0, \beta), \quad p' = E_e(1, \beta \sin \theta, 0, \beta \cos \theta),$$

$$k = E_\gamma(1, 0, 0, -1), \quad k' = E_\gamma(1, -\sin \theta, 0, -\cos \theta).$$

Для компонент вектора поляризации фотона также можем записать:

$$\varepsilon_\sigma^\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i\sigma, 0), \quad \varepsilon_{\sigma'}^{*\mu}(k') = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \cos \theta, i\sigma, -\sin \theta), \quad \sigma = \pm 1.$$

Теперь введем мандельштамовские переменные, задавая их в стандартной форме:

$$s = (p + k)^2 = (p' + k')^2 = (E_e + E_\gamma)^2,$$

$$t = (p - p')^2 = (k - k')^2 = -4E_\gamma^2 \sin^2(\theta/2), \quad (7)$$

$$u = (p - k')^2 = (p' - k)^2 = (E_e - E_\gamma)^2 - 4E_\gamma^2 \cos^2(\theta/2).$$

Помимо этого, удобно привести ряд дополнительных полезных сокращений:

$$s_m = s - m_e^2 = 2E_\gamma \sqrt{s}, \quad t_m = t - 4m_e^2,$$

$$u_m = u - m_e^2 = -2E_\gamma(2E_\gamma \cos^2(\theta/2) + m_e^2 / \sqrt{s}), \quad (8)$$

$$r = \sqrt{m_e^4 - su} = s_m \cos(\theta/2), \quad v = (s - u) / (4m_e),$$

с помощью которых конечные выражения примут более компактный вид.

3. Амплитуда комптоновского рассеяния. Матричный элемент рассматриваемой нами реакции, в самом общем случае, записывается следующим образом [8–10]:

$$T_{\lambda, \sigma}^{\lambda', \sigma'} = \varepsilon_\sigma^\mu(k) \varepsilon_{\sigma'}^{*\nu}(k') \bar{u}_{\lambda'}(p') H^{\mu\nu} u_\lambda(p),$$

где $\varepsilon_\sigma, \varepsilon_{\sigma'}$ – векторы поляризации входящего и выходящего фотонов соответственно; $u, \bar{u}$ – биспиноры электронов; λ, λ' – спиральности электронов в начальном и конечном состояниях соответственно.

Тензор амплитуды комптоновского рассеяния $H^{\mu\nu}$ представляется при помощи шести инвариантных амплитуд следующим образом:

$$H^{\mu\nu} = -\frac{P'^\mu P'^\nu}{P'^2} (T_1 + T_2 \hat{K}) - \frac{N^\mu N^\nu}{N^2} (T_3 + T_4 \hat{K}) - i \frac{P'^\mu N^\nu - P'^\nu N^\mu}{P'^2 K^2} \gamma_5 T_5 - i \frac{P'^\mu N^\nu + P'^\nu N^\mu}{P'^2 K^2} \gamma_5 \hat{K} T_6,$$

где $T_1, \dots, T_6$ – амплитуды Пранжа, а $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

Данные шесть амплитуд являются скалярными функциями, зависящими от двух мандельштамовских переменных v и t . 4-вектора $P^\mu, Q_\lambda^\mu, K^\mu, N^\mu$ есть функции от 4-импульсов начального и конечного состояний частиц, их явный вид можно представить следующим образом [8–10]:

$$P^\mu = \frac{1}{2}(p + p')^\mu, \quad K^\mu = \frac{1}{2}(k + k')^\mu, \quad Q^\mu = \frac{1}{2}(k' - k)^\mu,$$

$$P'^\mu = P^\mu - \frac{P \cdot K}{K^2} K^\mu, \quad N^\mu \equiv \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P'_\nu Q_\alpha K_\beta,$$

где $\varepsilon^{0123} = 1$.

Применяя метод базисных спиноров и выражения (7), (8), получим выражение для общей амплитуды комптоновского рассеяния в СЦИ, как функцию инвариантных и спиновых переменных:

$$T_{\lambda, \sigma}^{\lambda', \sigma'} = \frac{1}{2s_m} \sqrt{-t} \delta_{\lambda, -\lambda'} [\lambda (m_e^2 (T_1 - T_3 \sigma \sigma') + s(T_1 - T_3 \sigma \sigma') + m_e s_m (T_2 - T_4 \sigma \sigma')) + 2 s_m T_5 \sigma \delta_{\sigma, -\sigma'}] +$$

$$\frac{1}{2s_m} r \delta_{\lambda, \lambda'} [-2 m_e T_1 - s_m T_2 + 2 m_e T_3 \sigma \sigma' + s_m T_4 \sigma \sigma' - 2 s_m T_6 \lambda \sigma \delta_{\sigma, \sigma'}]. \quad (9)$$

Как известно, амплитуды Пранжа имеют кинематические особенности, что делает их неудобными для вычислений. По этой причине вводят инвариантные амплитуды, не содержащие особенностей подобного рода [10, 11]:

$$\begin{aligned} A_1 &= (T_1 + T_3 + v(T_2 + T_4)) / t, \quad A_2 = (2T_5 + v(T_2 + T_4)) / t, \\ A_3 &= \frac{m_e^2}{r^2} (T_1 - T_3 - \frac{t}{4v} (T_2 - T_4)), \quad A_4 = \frac{m_e^2}{r^2} (2m_e T_6 - \frac{t}{4v} (T_2 - T_4)), \\ A_5 &= \frac{t}{4v} (T_2 + T_4), \quad A_6 = \frac{t}{4v} (T_2 - T_4). \end{aligned} \quad (10)$$

Данные амплитуды не содержат кинематических неопределенностей и обладают следующей симметрией:

$$A_i(-v, t) = A_i(v, t), \quad i = 1 \dots 6.$$

Отметим, что с помощью амплитуд (10) можно получить выражения для электрической α и магнитной β поляризуемостей по следующему правилу:

$$\alpha + \beta = -\frac{1}{2\pi} (a_3 + a_6), \quad \alpha - \beta = -\frac{1}{2\pi} a_1,$$

где

$$a_i(v, t) = (A_i(v, t) - A_i^B(v, t)) \Big|_{v=t=0},$$

а индекс B означает борновское приближение.

Используя (10), получим общую амплитуду комптоновского рассеяния (9) через амплитуды A_i :

$$\begin{aligned} T_{\lambda, \sigma}^{\lambda', \sigma'} &= \frac{1}{4m_e^3 s_m} \left[2m_e \sqrt{-t} \delta_{-\lambda, \lambda'} (m_e^2 \{A_1(m_e^2 + s)\} t \lambda + A_2 s_m t \sigma - 4A_5 v (\lambda \{-m_e s_m + m_e^2 v + s v\} + s_m v \sigma)) \delta_{\sigma, -\sigma'} + \right. \\ &\quad \lambda (\{m_e^2 + s\} \{A_3 r^2 + A_6 m_e^2 t\} + 4A_6 m_e^3 s_m v) \delta_{\sigma, \sigma'} + 2r \delta_{\lambda, \lambda'} (-2m_e^3 \{A_1 m_e t + 2A_5 v (s_m - 2m_e v)\} \delta_{\sigma, -\sigma'} + \\ &\quad \left. \{-2m_e^2 (A_3 r^2 + A_6 m_e (m_e t + 2s_m v)) s_m (A_4 r^2 + A_6 m_e^2 t) \lambda \sigma\} \delta_{\sigma, \sigma'} \right]. \end{aligned}$$

4. Амплитуда комптоновского рассеяния в квантовой электродинамике (КЭД). Апробацию предлагаемой в работе методики проведем на примере комптоновского рассеяния в КЭД. Амплитуда комптоновского рассеяния в борновском приближении запишем в виде:

$$M_{\lambda, \sigma}^{\lambda', \sigma'} = -4\pi\alpha \bar{u}_{\lambda}(p) \left[\frac{\hat{\epsilon}_{\sigma'}(k')(\hat{p} + \hat{k} + m_e)\hat{\epsilon}_{\sigma}(k)}{s_m} + \frac{\hat{\epsilon}_{\sigma}(k)(\hat{p}' - \hat{k} + m_e)\hat{\epsilon}_{\sigma'}(k')}{u_m} \right] u_{\lambda'}(p'),$$

где α – постоянная тонкой структуры.

Используя МБС, получим данную амплитуду, как функцию произведения мандельштамовских и спиновых переменных:

$$M_{\lambda, \sigma}^{\lambda', \sigma'} = \frac{4\pi\alpha}{s_m^2 u_m} \left[\lambda m_e \sqrt{-t} \left(2r^2 - s_m (4m_e v + \lambda \sigma t) \delta_{\sigma, -\sigma'} \right) \delta_{\lambda', -\lambda} + 2r \delta_{\lambda', \lambda} \left(-m_e^2 t + s_m (u_m + t \delta_{\lambda, \sigma}) \delta_{\sigma, \sigma'} \right) \right]. \quad (11)$$

Благодаря симметриям, присутствующим в КЭД, число независимых амплитуд уменьшается до шести. Используя соотношение, приведенное выше, для различных спиральностей можно получить следующие выражения:

$$M_{\pm\pm}^{\pm\pm} = 8\pi\alpha \frac{r(s_m^2 + m_e^2 t)}{s_m^2 u_m}, \quad M_{\pm\mp}^{\pm\mp} = 8\pi\alpha \frac{r^3}{s_m^2 u_m},$$

$$M_{\pm\mp}^{\mp\pm} = \mp 8\pi\alpha \frac{m_e s t \sqrt{-t}}{s_m^2 u_m}, \quad M_{\pm\mp}^{\mp\mp} = M_{\pm\pm}^{\mp\pm} = \mp 8\pi\alpha \frac{m_e r^2 \sqrt{-t}}{s_m^2 u_m}, \quad (12)$$

$$M_{\pm\pm}^{\pm\mp} = M_{\pm\mp}^{\pm\pm} = 8\pi\alpha \frac{m_e^2 r t}{s_m^2 u_m}, \quad M_{\pm\pm}^{\mp\mp} = \mp 8\pi\alpha \frac{m_e^3 t \sqrt{-t}}{s_m^2 u_m}.$$

С точностью до фазового множителя $\lambda\lambda'$ результаты (12) совпадают с матричными элементами, вычисленными в работе [9].

5. Получение инвариантных амплитуд. В данном разделе получим выражения для амплитуд Пранжа и Львова в рамках КЭД для борновского приближения в качестве теста предлагаемой методики.

Рассмотрим два способа извлечения инвариантных амплитуд.

Первый способ состоит в том, что из соотношения:

$$M_{\lambda,\sigma}^{\lambda',\sigma'} = T_{\lambda,\sigma}^{\lambda',\sigma'} \quad (13)$$

получим систему уравнений для амплитуд A_i (или T_i). В силу того, что существует лишь шесть независимых амплитуд (12), система состоит из шести уравнений, зависящих от инвариантных амплитуд. Решая данную систему, найдем явные выражения для амплитуд T_i :

$$T_1^B = -\frac{8\pi\alpha m_e t}{t^2 - 16m_e^2 v^2}, \quad T_2^B = -\frac{16\pi\alpha m_e v}{t^2 - 16m_e^2 v^2}, \quad T_3^B = 0,$$

$$T_4^B = \frac{16\pi\alpha m_e v}{t^2 - 16m_e^2 v^2}, \quad T_5^B = \frac{4\pi\alpha m_e t}{t^2 - 16m_e^2 v^2}, \quad T_6^B = -\frac{4\pi\alpha t}{t^2 - 16m_e^2 v^2}. \quad (14)$$

Результаты (14) согласуются с данными, полученными в работе [12].

Далее, используя соотношения (10), рассчитываем амплитуды A_i :

$$A_1^B = -\frac{8\pi\alpha m_e}{t^2 - 16m_e^2 v^2}, \quad A_2^B = \frac{8\pi\alpha m_e}{t^2 - 16m_e^2 v^2},$$

$$A_3^B = 0, \quad A_4^B = 0, \quad A_5^B = 0, \quad A_6^B = -\frac{8\pi\alpha m_e}{t^2 - 16m_e^2 v^2}. \quad (15)$$

Расчеты (15) совпадают с результатами, приведенными в работе [9] для случая нулевого аномального магнитного момента частиц. Как следует из выражений (14) и (15), амплитуды являются функциями инвариантных переменных v и t .

Второй способ получения искомых выражений состоит в разложении обеих частей равенства (13) по частоте фотона $\omega = E_\gamma$ ($\omega \ll m_e$). Сравнивая выражения при соответствующих степенях ω , так же как и в первом способе, получаем систему уравнений, из которой находим инвариантные амплитуды (или их линейные комбинации). Данную систему уравнений удобно записывать для фиксированных углов рассеяния, таких как $\theta = 0$ (рассеяние вперед) и для $\theta = \pi$ (рассеяние назад).

Опишем схему работы данного метода. Разложение матричного элемента (9) до ω^2 имеет вид:

$$T_{\lambda,\sigma}^{\lambda',\sigma'}(\theta) \approx 4m_e \omega^2 (\lambda \sin(\theta/2) \delta_{\lambda',-\lambda} - \cos(\theta/2) \delta_{\lambda',\lambda}) \times$$

$$\left[(A_3 + A_6) \cos^2(\theta/2) \delta_{\sigma',\sigma} - A_1 \sin^2(\theta/2) \delta_{-\sigma',\sigma} \right]. \quad (16)$$

Для случаев $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ из (16) получаем:

$$T_{\lambda,\sigma}^{\lambda',\sigma'}(\theta = 0) = -4\omega^2 (A_3 + A_6) m_e \delta_{\lambda',\lambda} \delta_{\sigma',\sigma},$$

$$T_{\lambda,\sigma}^{\lambda',\sigma'}(\theta = \pi) = -4\omega^2 A_1 m_e \lambda \delta_{\lambda',-\lambda} \delta_{-\sigma',\sigma}. \quad (17)$$

Несложно также получить и разложение матричного элемента (9) по более высоким степеням ω . Так, слагаемые $\sim \omega^3$ при $\theta = 0, \pi$ имеют вид:

$$\begin{aligned} T_{\lambda, \sigma}^{\lambda', \sigma'}(\theta = 0) &= -4\omega^3(2(A_3 + A_6) - \lambda \sigma A_4) m_e \delta_{\lambda', \lambda} \delta_{\sigma', \sigma}, \\ T_{\lambda, \sigma}^{\lambda', \sigma'}(\theta = \pi) &= -4\omega^3(A_2 + A_5) m_e \sigma \delta_{\lambda', -\lambda} \delta_{-\sigma', \sigma}. \end{aligned} \quad (18)$$

Выполняя разложение по степеням ω для матричного элемента комптоновского рассеяния, рассчитанного в той или иной модели, можно извлечь линейные комбинации амплитуд A_i посредством его сравнения с соотношениями (17) и (18).

Данную методику авторы планируют применить для следующего порядка теории возмущений. Это позволит определить вклады соответствующих слагаемых в поляризуемости частиц.

Заключение. Предложена методика, состоящая в получении инвариантных амплитуд комптоновского рассеяния в различных квантово-полевых теориях и моделях, путем сравнения матричных элементов в терминах явно скалярных функций. Для расчета матричных элементов авторами предлагается использовать МБС, в котором легко получить эти выражения для произвольных значений спиновых переменных $(\lambda, \sigma, \lambda', \sigma')$.

Работоспособность данной методики продемонстрирована на примере получения инвариантных амплитуд в рамках КЭД для борновского приближения. Полученные результаты согласуются с работами других авторов [8–10], что подтверждает справедливость методики расчета (см. (14), (15)).

Также следует отметить, что разработанная методика может быть использована для других квантово-полевых теорий и моделей.

Литература

1. Максименко Н. В., Мороз Л. Г. // Вопросы атомной науки и техники. Серия: общая и ядерная физика. 1979. Т. 10, № 4. С. 26–27.
2. Левчук М. И., Мороз Л. Г. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1985. № 1. С. 45–54.
3. Ragusa S. // Phys. Rev. 1993. Vol. D47. P. 3757–3767.
4. Богущ А. А., Федоров Ф. И. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-тэхн. навук. 1962. № 2. С. 26–38.
5. Федоров Ф. И. // Изв. вузов. Физика. 1980. № 2. С. 32–50.
6. Галынский М. В., Сикач С. М. // ЭЧАЯ. 1998. Т. 29, № 5. С. 1133–1193.
7. Андреев В. В. // Ядерная физика. 2003. Т. 66, № 2. С. 410–420.
8. Prange R. E. // Phys. Rev. 1958. Vol. 110. С. 235–240.
9. Denner A., Dittmaier S. // Nucl. Phys. 1999. Vol. B540. P. 58–86.
10. Петрунькин В. А. // ЭЧАЯ. 1981. Т. 12, № 3. С. 692–753.
11. L'vov A. I. // Sov. J. Nucl. Phys. 1981. Vol. 34. P. 597.
12. Lapidus L. I., Guan-Chiao Chjou // JETP. 1961. Vol. 41. P. 294–302.

V. V. ANDREEV, A. M. SEYTLIEV

COMPTON SCATTERING DESCRIPTION IN QED BY THE INVARIANT AMPLITUDES METHOD

Summary

A method based on the matrix element calculation for obtaining invariant Compton scattering amplitudes in various models and quantum-field theories is proposed.