

УДК 513.731

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. В. ПОГОРЕЛОВ

О МИНИМАЛЬНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ В СФЕРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Предметом настоящей заметки являются минимальные компактные гиперповерхности в сферическом пространстве. Под n -мерным сферическим пространством S_n мы понимаем n -мерную сферу в $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве. Пересечение S_n евклидовыми плоскостями, проходящими через центр сферы, будем называть плоскостями S_n . Одномерная плоскость называется прямой, $(n-1)$ -мерная — гиперплоскостью. Гиперповерхность в S_n будем называть минимальной, если ее площадь стационарна, т. е.

$$\delta \int ds = 0. \quad (1)$$

Для того чтобы гиперповерхность была минимальной в смысле данного определения, необходимо и достаточно, чтобы ее средняя кривизна была равна нулю.

Теорема 1. Пусть F — компактная минимальная гиперповерхность в сферическом пространстве S_n и P — точка, не лежащая ни в одной из касательных гиперплоскостей F .

Тогда F есть гиперплоскость.

Теорема 2. Пусть F — односвязная компактная минимальная гиперповерхность в сферическом пространстве S_n и g — прямая в S_n , не лежащая ни в одной из касательных гиперплоскостей F .

Тогда F есть гиперплоскость.

Доказательство теоремы 2. Обозначим через V_F конус, проектирующий гиперповерхность F из центра O сферы S_n . Проведем двумерную плоскость σ_g через точку O и прямую g . Пусть e и e_1 — два единичных перпендикулярных вектора в плоскости σ_g . Проведем в произвольной точке X гиперповерхности F единичный вектор нормали $n(X)$ к конусу V_F .

Так как прямая g не лежит ни в одной из касательных гиперплоскостей F , то $en(X)$ и $e_1n(X)$ не обращаются в нуль одновременно ни для какого X . Определим на гиперповерхности F непрерывную функцию $\varphi(X)$, удовлетворяющую условию

$$\varphi(X) = \arg(en(X) + e_1n(X)). \quad (2)$$

Существование такой функции обеспечивается односвязностью гиперповерхности F и необращением в нуль одновременно величин en и e_1n . Так как гиперповерхность F компактна, то $\varphi(X)$ достигает максимума в некоторой точке X_0 . Если функцию $\varphi(X)$ рассматривать на всем конусе V_F , то и в этом случае максимум φ достигается в точке X_0 .

Пусть для определенности $en(X_0) \neq 0$ в точке X_0 . Отнесем конус V_F в окрестности точки X_0 к прямоугольным декартовым координатам $z, x_1, x_2, \dots, x_n$, приняв направление вектора e за направление оси z , а направление вектора e_1 — за направление оси x_1 . При таком выборе координатных осей конус V_F в окрестности точки X_0 задается уравнением $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Из равенства нулю средней кривизны гиперповерхности F следует равенство нулю средней кривизны конуса V_F . Поэтому задающая конус функция $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta z (1 + (\nabla z)^2) - \sum_{i,j} z_i z_j z_{ij} = 0. \quad (3)$$

Это уравнение, как известно, является эллиптическим.

Введенная в рассмотрение функция $\varphi(X)$ просто связана с производной z по x_1 . Именно, $z_1 = \operatorname{tg} \varphi$. Ввиду монотонности функции tg отсюда следует, что в точке X_0 функция z_1 тоже имеет экстремальное значение.

Дифференцируя уравнение (3) по x_1 и полагая $\partial z / \partial x_1 = \zeta$, получим

$$\Delta \zeta (1 + (\nabla z)^2) - \sum_{i,j} z_i z_j \zeta_{ij} + \sum_k A_k \zeta_k = 0. \quad (4)$$

Так как ζ достигает экстремума, то, согласно принципу максимума для решений уравнений эллиптического типа, из (4) следует $\zeta = \operatorname{const}$. Геометрически это значит, что сечение конуса V_F плоскостью σ_g есть прямая.

Ввиду компактности F все прямые в S_n , близкие к g , также обладают свойством прямой g , т. е. не лежат в касательных гиперплоскостях F . Построив для каждой такой прямой g' плоскость $\sigma_{g'}$, мы заключаем, что она также пересекает конус V_F по прямой. А это значит, что конус V_F является гиперплоскостью. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 2. В этом случае при выборе декартовой системы координат за ось z принимается прямая OP .

Физико-технический институт низких температур
Академии наук СССР
Харьков

Поступило
23 V 1972