Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (117), 2019

УДК 512.542

Конечные группы, факторизуемые тремя попарно перестановочными подгруппами

С.В. Балычев, А.Ф. Васильев, В.М. Селькин

Исследуются свойства конечных групп, представимых в произведение своих трех попарно перестановочных подгрупп.

Ключевые слова: конечная группа, подгруппа, произведение попарно перестановочных подгрупп, w-сверхразрешимая группа, сильно сверхразрешимая группа.

The properties of finite groups representable in the product of their three pairwise permutable subgroups are studied.

Keywords: finite group, subgroup, product of pairwise permutable subgroups, w-supersoluble group, strongly supersoluble group.

1. Введение. Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. Изучение групп, представимых в произведение своих двух или нескольких подгрупп, является классическим направлением в теории групп. Наиболее изученным является случай, когда группа факторизуется своими двумя подгруппами. Намного меньше работ посвящено исследованию ситуаций, когда группа факторизуется тем или иным способом своими тремя подгруппами. Отметим некоторые результаты в этом направлении. Согласно О. Кегелю [1] группа G называется трижды факторизуемой, если $G = AB = BC = AC$, где A, B, C – некоторые подгруппы группы G. В [1] была доказана нильпотентность группы G при условии нильпотентности подгрупп A, B и C и сверхразрешимость G при условии, что A и B нильпотентны, а C сверхразрешима. Л.С. Казарин [2] с использованием классификации конечных простых неабелевых групп установил разрешимость G, если A, B и C разрешимы. В работе [3] было начато исследование свойств групп $G = AB = BC = AC$, у которых подгруппы A, B и C принадлежат насыщенной формации $\mathfrak{F}$. Эти исследования были продолжены в работах [4]–[7]. С трижды факторизуемыми группами тесно связаны группы со следующим способом перемножения подгрупп. Пусть группа G факторизуется своими тремя подгруппами A, B и C следующим образом: $G = ABC = \{abc \mid a \in A, b\in B, c\in C\}$, причем $AB = BA$, $BC = CB$ и $CA = AC$. Обозначим через $M = AB$. $N = BC$ и $L = AC$. Тогда $G = MN = NL = LM$. Отсюда видно, что многие результаты, полученные для трижды факторизуемых групп, можно распространить на группы вида $G = ABC$. Этот факт отмечен в более общем виде в работе [8]. Например, из приведенной выше теоремы Л.С. Казарина следует, что если AB, BC и CA – разрешимые подгруппы группы $G = ABC$, то G также разрешима. Обратный перенос теорем о свойствах групп вида $G = ABC$ на группы с факторизацией $G = MN = NL = LM$ является не столь очевидным. Поэтому изучение факторизаций $G = ABC$, где A, B и C – попарно перестановочные подгруппы группы G, представляет независимый интерес, что также подчеркивается недавними работами [9]–[10].

Основной целью настоящей работы является доказательство следующих результатов.

Теорема A. *Пусть группа $G = ABC$ является произведением своих попарно перестановочных подгрупп A, B, C. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если подгруппы AB, AC, BC w-сверхразрешимы и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G также w-сверхразрешима.*

(2) *Если подгруппы AB, AC, BC сверхразрешимы и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G w-сверхразрешима.*

(3) *Если подгруппы AB, AC, BC сверхразрешимы и коммутант группы G нильпотентен, то G также сверхразрешима.*

(4) *Если подгруппы AB, AC, BC сильно сверхразрешимы и G содержит нильпотентную нормальную подгруппу N и в факторгруппе G/N все силовские подгруппы элементарно абелевы, то G сильно сверхразрешима.*

Используя теорему A можно получить новые результаты о свойствах групп $G = ABC$ в терминах свойств строения и вложения факторов A, B и C.

Теорема B. *Пусть группа $G = ABC$ является произведением своих попарно перестановочных подгрупп A, B, C. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если подгруппы A, B, и C w-сверхразрешимы и* P- *субнормальны в соответствующих произведениях AB, AC, BC и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G w-сверхразрешима.*

(2) *Если подгруппы A, B, и C сверхразрешимы и* P-*субнормальны в соответствующих произведениях AB, AC, BC и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G w-сверхразрешима.*

(3) *Если подгруппы A, B, и C сверхразрешимы и* P-*субнормальны в соответствующих произведениях AB, AC, BC и коммутант группы G нильпотентен, то G w-сверхразрешима.*

(4) *Если подгруппы A, B, и C сильно сверхразрешимы и* субмодулярны *в соответствующих произведениях AB, AC, BC, причем G содержит нильпотентную нормальную подгруппу N и в факторгруппе G/N все силовские подгруппы элементарно абелевы, то G является sm*U*-группой*.

2. Определения, обозначения и необходимые результаты.

В работе нами используются стандартные обозначения, определения и необходимые результаты, которые при необходимости можно найти в монографиях [11]–[13].

Нам потребуются определения следующих классов конечных групп, тесно связанных с классом всех сверхразрешимых групп.

В работе [14] были введены следующие два определения.

Определение 2.1. *Подгруппа H группы G называется* **P**-*субнормальной в G, если либо H = G, либо существует цепь подгрупп*

$$H = H_0 < H_1 < \ldots < H_{n-1} < H_n = G,$$

такая, что $|H_{i+1} : H_i|$ *– простое число для любого* $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Определение 2.2. *Группа G называется* w-*сверхразрешимой, если любая силовская подгруппа группы из G является* **P**-*субнормальной в G.*

Обозначается через wU класс всех w-сверхразрешимых групп.

Теорема 2.3 ([14, теорема 2.3]). *Любая* w-*сверхразрешимая группа разрешима.*

Теорема 2.4 ([14, теорема 2.6). *Класс* wU *является наследственной насыщенной формацией.*

Для группы G обозначим через Syl(G) множество всех ее силовских подгрупп.

Теорема 2.5 ([14, теорема 2.10]). *Формация* wU *является локальной и имеет локальный экран f такой, что* $f(p) = (G \in \mathrm{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathrm{A}(p-1))$ *для любого простого p.*

Нам потребуются еще свойства w-сверхразрешимых групп из [14], которые мы соберем в следующем предложении.

Предложение 2.6. *Пусть G –* w-*сверхразрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *Любая метанильпотентная подгруппа группы G является сверхразрешимой*.

(2) *Группа G является дисперсивной по Оре*.

(3) *Обобщенный коммутант группы G нильпотентен.*

Согласно [14] обобщенным коммутантом группы G называется наименьшая нормальная подгруппа N группы G такая, что G/N является группой с абелевыми силовскими подгруппами.

В работе [15] исследовались свойства групп, представимых в произведение своих **P**-субнормальных подгрупп. Нам потребуется следующий результаты.

Теорема 2.6 ([15, теорема 2.10]). *Пусть группа G = AB – произведение разрешимых подгрупп A и B. Если A и B* **P**-*субнормальны в G, то G разрешима*.

Теорема 2.7 ([15, теорема 4.10]). *Пусть группа G = AB – произведение* w-

сверхразрешимых подгрупп A и B. Если A и B P*-субнормальны в G и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то* G w*-сверхразрешима*.

Отметим, что в настоящее время формация всех w-сверхразрешимых групп активно применяется при решении различных проблем теории групп, в частности, при изучении факторизаций групп, см., например, работы [15]–[17].

Нам потребуется определение и свойства еще одного класса групп, тесно связанного с классом всех сверхразрешимых групп.

Определение 2.8 [18]. *Подгруппа H группы G называется субмодулярной в G, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_{s-1} \leq H_s = G$ такая, что H_{i-1} – модулярная подгруппа в H_i для $i = 1, \ldots , s$.*

В [19] изучался класс всех групп с субмодулярными силовскими подгруппами (обозначается через *sm*U), а также его подкласс *s*U сильно сверхразрешимых групп, т. е. всех сверхразрешимых групп с субмодулярными силовскими подгруппами.

Пусть B – класс всех абелевых групп экспоненты, свободной от квадратов простых чисел.

Теорема 2.9 [19, теорема A]. *Класс s*U *всех сильно сверхразрешимых групп является наследственной насыщенной формацией и имеет локальный экран f такой, что* $f(p) = \mathrm{A}(p\text{-}1) \cap \mathrm{B}$ *для любого простого числа p.*

Теорема 2.10 [19, теорема B]. *Группа G сильно сверхразрешима тогда и только тогда, когда G метанильпотентна и любая силовская подгруппа из G субмодулярна в G.*

Теорема 2.11 [19, теорема C]. *Класс sm*U *всех групп с субмодулярными силовскими подгруппами является наследственной насыщенной формацией и имеет локальный экран f такой, что* $f(p) = (G \in \mathrm{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathrm{A}(p\text{-}1) \cap \mathrm{B})$ *для любого простого числа p.*

В работе [20] исследовались группы, представимые в произведение своих субмодулярных подгрупп из классов *sm*U и sU. Нам потребуются следующие результаты из [20], которые мы сформулируем в следующем предложении.

Предложение 2.12. *Пусть группа $G = AB$ – произведение субмодулярных подгрупп A и B. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *Если $A \in$*smU*, $B \in$*smU*, причем G содержит нильпотентную нормальную подгруппу N и в факторгруппе G/N все силовские подгруппы элементарно абелевы, то $G \in$*smU.

(2) *Если $A \in$*sU*, $B \in$*sU*, причем G содержит нильпотентную нормальную подгруппу N и в факторгруппе G/N все силовские подгруппы элементарно абелевы, то $G \in$*smU.

(3) *Если $A \in$*sU*, $B \in$*sU *и коммутант G нильпотентен, то $G \in$*sU.

3. Доказательства теорем A и B.

Докажем теорему A. Установим справедливость утверждения (1). Предположим противное. Пусть $G = ABC$, где AB, AC, BC – собственные попарно перестановочные *w*-сверхразрешимые подгруппы G, является контрпримером минимального порядка к (1). Так как по теореме 2.3 подгруппы AB, AC, BC разрешимы, то по отмеченной выше теореме Л.С. Казарина группа G разрешима. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа G. Ввиду леммы 2.1, теоремы 2.4 все условия утверждения (1) выполняются для факторгруппы G/N. Так как $|G/N| < |G|$, то в силу выбора группы G получаем, что $G/N \in$wU. Так как класс wU является насыщенной формацией, то в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и подгруппа Фраттини $\Phi(G) = 1$. В этом случае N является p-группой для некоторого простого числа p и $N = C_G(N) = F(G)$. Кроме того, $G = NM$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G и $N \cap M = 1$. Отметим также, что $N = G^{\mathrm{wU}}$, а значит, $M \in$wU.

Обозначим следующие подгруппы группы G:

$$R_1 = NAB,\ R_2 = NAC,\ R_3 = NBC.$$

Докажем, что по крайней мере две из обозначенных подгрупп, неравны G. Допустим противное. Пусть, например, $R_1 = R_2 = G$. Так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $\Phi(G) = 1$, то AB и AC являются максимальными подгруппами в G, дополняющие N. Ввиду того, что ядра $\mathrm{Core}_G(AB) = \mathrm{Core}_G(AB) = 1$, то по известной теореме Оре AB и AC – сопряженные максимальные подгруппы в G. Но это противоречит тому, что $(AB)(AC) = ABC = G$.

Проводя аналогичные рассуждения для других пар подгрупп R_i, где $i = 1, 2, 3$, получаем, что по крайней мере две из них отличны от группы G. Будем считать, что $R_1 \neq G$ и $R_2 \neq G$.

Покажем, что R_i являются w-сверхразрешимыми подгруппами для $i = 1, 2$. Согласно тождеству Дедекинда

$$R_1 = NAB \cap G = NAB \cap ABC = AB(R_1 \cap C).$$

Так как wU – наследственная формация, то $R_1 \cap C \in$wU. Ввиду $|R_1| < |G|$ по индукции следует, что $R_1 \in$wU. Аналогично доказывается, что $R_2 \in$wU. Тогда по (2) предложения 2.6 следует R_1 и R_2 дисперсивны по Оре. Откуда и из $G = R_1 R_2$ нетрудно заметить, что G также дисперсивна по Оре. Из отмеченных выше свойств минимальной нормальной подгруппы N в G следует, что N является силовской p-подгруппой G, где p – наибольший простой делитель порядка группы G.

Так как $N = C_G(N)$, то $O_{p'}(R_i) = 1$ и $F_p(R_i)$, для $i = 1, 2$. Согласно теореме 2.5 формация wU имеет локальный экран f такой, что

$$f(p) = (G \in \mathrm{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathrm{A}(p\text{-}1))$$

для любого простого p. Тогда по лемме 4.5 из [12] $R_i / F_p(R_i) = R_i \cap M \in f(p)$.

Заметим, что $M = (R_1 \cap M)(R_2 \cap M)$. По условию $G/N \cong M$ является А-группой, т. е. в ней все ее силовские подгруппы абелевы.

Пусть $q \in \pi(M)$. Тогда по лемме 11.6 из [12] найдутся такие силовские q-подгруппы M_q, $(R_1 \cap M)_q$ и $(R_2 \cap M)_q$ в M, R_1 и R_2 соответственно, что $M_q = (R_1 \cap M)_q(R_2 \cap M)_q$. Так как M_q – абелева группа и $R_i \cap M \in \mathrm{A}(p\text{-}1)$, то нетрудно видеть, что $M_q \in \mathrm{A}(p\text{-}1)$. Следовательно, любая силовская подгруппа из M принадлежит $f(p)$. Откуда и из $G/N \in$wU следует, что $G \in$wU. Получили противоречие. Утверждение (1) доказано.

Так как любая сверхразрешимая группа является w-сверхразрешимой, то утверждение (2) непосредственно следует из (1).

Установим справедливость (3). Пусть для группы $G = ABC$ выполняются все условия утверждения (3). Так как $G \in \mathrm{NA} \subseteq \mathrm{NA}$, то для G выполняются все условия (2). Следовательно, G является w-сверхразрешимой. Так как G метанильпотентна, то ввиду (1) предложения 2.6 она является сверхразрешимой. Утверждение (3) доказано.

Установим справедливость утверждения (4). Доказательство проводится аналогично доказательству утверждения (1) с учетом теорем 2.8–2.10. Теорема доказана

Доказательство теоремы B. Установим справедливость утверждения (1). Пусть группа $G = ABC$ удовлетворяет условиям утверждения (1). Тогда подгруппы A и B w-сверхразрешимы и P- субнормальны в AB. Из нильпотентности обобщенного коммутанта G следует нильпотентность обобщенного коммутанта AB. Тогда по теореме 2.7 подгруппа AB также w-сверхразрешима. Аналогично доказывается w-сверхразрешимость подгрупп AC и BC. Теперь утверждение следует из (1) теоремы А. Утверждение (2) непосредственно следует из (1). Утверждение (3) следует из (2) с учетом утверждения (1).

Утверждения (3) и (4) доказываются аналогично (1) с учетом (1) предложения 2.6.

Утверждение (4) доказывается аналогично (1) с применением (1) из предложения 2.12.

4. Заключительные замечания.

Группа G называется произведением своих n попарно перестановочных подгрупп A_1, A_2, …, A_n, если $G = A_1A_2 \cdots A_n$ и $A_iA_j = A_jA_i$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Если $n \geq 3$, то, обозначая через $B = A_3 \cdots A_n$, *мы получим факторизацию* $G = A_1A_2B$. Индукцией по n с помощью теоремы А получаем следующий результат.

Теорема С. *Пусть группа $G = A_1A_2 \cdots A_n$ является произведением своих попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \dots, A_n$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *Если подгруппа A_iA_j w-сверхразрешима* для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ *и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G также w-сверхразрешима.*

(2) *Если подгруппа A_iA_j сверхразрешима* для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ *и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G также w-сверхразрешима.*

(3) *Если подгруппа A_iA_j сверхразрешима* для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ *и коммутант группы G нильпотентен, то G также сверхразрешима.*

(4) *Если подгруппа* A_iA_j *сильно сверхразрешима* для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *и* G *содержит нильпотентную нормальную подгруппу* N *и в факторгруппе* G/N *все силовские подгруппы элементарно абелевы, то* G *сильно сверхразрешима.*

Отметим некоторые направления дальнейших исследований групп, факторизуемых своими тремя подгруппами.

Проблема 1. Верны ли аналоги результатов теорем A и B для факторизаций вида $G = MN = NL = LM$? Например, верно ли, что группа $G = MN = NL = LM$ является w-сверхразрешимой, если M, N, L — w-сверхразрешимые подгруппы и обобщенный коммутант группы G нильпотентен?

Сформулируем еще две открытые проблемы. Необходимые определения и результаты, связанные с ними, можно найти в монографии [21].

Проблема 2. Пусть **F** – наследственная насыщенная формация. Описать все F, которые содержат каждую группу $G = MN = NL = LM$, где M, N и L – F-субнормальные F-подгруппы группы G.

Проблема 3. Пусть **F** – наследственная насыщенная формация. Описать строение групп $G = ABC$, у которых A, B и C – F-субнормальные F-подгруппы в G.

Литература

1. Kegel, O.H. Zur Struktur mehrfach faktorisierter endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1965. – 87. – S. 42–48.

2. Казарин, Л.С. Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами / Л.С. Казарин // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 34, № 7–8. – С. 947–950.

3. Васильев, А.Ф. К проблеме перечисления локальных формаций с заданным свойством / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1987. – Вып. 3. – С. 3–11.

4. Васильев, А.Ф. О перечислении локальных формаций с условием Кегеля / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 7. – С. 86–93.

5. Ballester-Bolinches, A. Finite trifactorized groups and formations / A. Ballester-Bolinches, A. Martinez-Pastor, M.C. Pedraza-Aguilera // J. Algebra. – 2000. – Vol. 226, № 2. – P. 990–1000.

6. Ballester-Bolinches, A. On formations with the Kegel property / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro // J. Group Theory. – 2005. – № 8. – P. 605–611.

7. Васильев, А.Ф. Арифметические графы и классы групп / А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко // Сиб. мат. журн. – 2019. – Т. 60, № 1. – С. 55–73.

8. Амберг, Б. Конечные группы с кратными факторизациями / Б. Амберг, Л.С. Казарин, Б. Хефлинг // Фундаментальная и прикладная математика. – 1998. – Т. 4, № 4. – С. 1251–1263.

9. Busetto, G. The fitting length of finite soluble groups I. – Hall subgroups / G. Busetto, E. Jabara // Arch. Math. (Basel). – 2016. – Vol. 106, № 5 – P. 409–416.

10. Jabara, E. Some results on finite trifactorized groups [Electronic resource] / E. Jabara // São Paulo J. Math. Sci. – 2018. – Access mode : https://doi.org/10.1007/s40863-018-0091-2. – Date of access : 15.06.2019.

11. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin/New York : Walter de Gruyter, 2010. – 334 p.

12. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

13. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New-York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

14. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

15. Васильев, А.Ф. О произведениях P-субнормальных подгрупп в конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 59–67.

16. Ballester-Bolinches, A. Some results on Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro, A.A. Heliel, M.M. Al-Shomrani // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2017. – V. 40, is. 3. – P. 1341–1351.

17. Ballester-Bolinches, A. On Products of Generalised Supersoluble Finite Groups [Electronic resource] / A. Ballester-Bolinches, W.M. Fakieh, M.C. Pedraza-Aguilera // Mediterr. J. Math. – Access mode : ttps://doi.org/10.1007/s00009-019-1323-0. – Date of access : 24.03.2019.

18. Zimmermann, I. Submodular Subgroups in Finite Groups / I. Zimmermann // Math. Z. – 1989. – Vol. 202. – P. 545–557.

19. Васильев, В.А. Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами / В.А. Васильев // Сиб. матем. журн. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1277–1288.

20. Васильев, В.А. О влиянии субмодулярных подгрупп на строение конечных групп / В.А. Васильев // Веснік Віцебск. дзярж. ун-та. – 2016. – № 2 (91). – С. 17–21.

21. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн. : Беларуская навука, 2003. – 254 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 04.10.2019