

О периодических решениях многомерных систем второго порядка с параметром

Ю.М. ГРЕБЕНЦОВ¹, В.Н. ЛАПТИНСКИЙ²

Изучены актуальные вопросы конструктивной теории периодических решений одного класса линейных многомерных дифференциальных систем второго порядка с параметром. Получены коэффициентные достаточные условия существования и единственности периодического решения, приведён алгоритм его построения, а также установлены новые структурные свойства решения. Выведены оценки области локализации решения и его производной.

Ключевые слова: линейная дифференциальная система, периодическое решение, алгоритм.

Actual issues of the constructive theory of periodic solutions of one kind of linear multidimensional second order differential system with the parameter are studied in the article. Sufficient coefficient conditions of existence and uniqueness of periodic solution have been obtained, the algorithm for its construction has been developed as well as new structural properties of its solution have been determined. The estimators for the area of localization of the solution and its first derivative have been derived.

Keywords: linear differential system, periodic solution, algorithm.

Рассмотрим задачу о периодических решениях (с периодом ω) системы

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda A(t)x + \lambda B \frac{dx}{dt} + f(t), \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t)$, $f(t)$ – непрерывные ω -периодические матрицы соответствующих размерностей, B – постоянная матрица, $\lambda \in \mathbb{R}$.

В научной литературе в настоящее время не существует универсальных методов исследования периодических решений. Поэтому вполне естественной является разработка соответствующих методов применительно к отдельным классам систем. К настоящему времени, благодаря усилиям многих исследователей, разработано значительное количество достаточно общих методов анализа широкого круга систем (см. монографии [1]–[8] и приведённую в них библиографию). Эффективно проверяемые условия существования и удобные для практического применения алгоритмы построения периодических решений дают конструктивные методы [2], [4]–[8]. Под конструктивными методами понимают определенные методы построения решений различных классов уравнений, исследования существования и свойств точных и приближенных решений. Основной характеристикой конструктивных методов является возможность с их помощью доводить решение задачи до конечного результата (вплоть до численных значений), а также практически проверять те теоретические предпосылки и условия, которые обеспечивают правомочность применения этих методов к конкретным классам задач [8, с. 3].

Данная работа посвящена конструктивному анализу на основе применения методов [6], [7] линейной многомерной периодической системы (1); она выполнена по материалам, изложенным в [9]. Получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости данной задачи, выведена оценка области локализации решения и разработан алгоритм его построения, включая оценку погрешностей приближенных решений. На основе используемой формы решения и его приближений выполнен анализ его структурных свойств. Результаты работы представляют собой дополнение и развитие [6], [7] в смысле структурных свойств периодических решений дифференциальных систем. Их полное изложение, включая иллюстрационные модели, дано в [9].

Известно (см., например, [10, с. 216]), что вместо задачи о периодических решениях можно рассматривать соответствующую эквивалентную краевую задачу. Для системы

$$\begin{aligned} \frac{dx(t, \lambda)}{dt} &= y(t, \lambda), \\ \frac{dy(t, \lambda)}{dt} &= \lambda A(t)x(t, \lambda) + \lambda B y(t, \lambda) + f(t) \end{aligned} \quad (2)$$

периодические краевые условия имеют вид

$$x(0, \lambda) = x(\omega, \lambda), \quad y(0, \lambda) = y(\omega, \lambda). \quad (3)$$

Следуя подходу [7], решение периода ω системы (1) (то есть задачи (2), (3)) отыскиваем в виде

$$x(t, \lambda) = c(\lambda) + z(t, \lambda), \quad (4)$$

где $c(\lambda)$ – постоянный вектор, $z(t, \lambda)$ – ω -периодическая векторная функция, подчинённая интегральному условию

$$\int_0^{\omega} A(\tau)z(\tau, \lambda)d\tau = 0. \quad (5)$$

Тогда задача (2), (3) примет вид

$$\frac{dz(t, \lambda)}{dt} = y(t, \lambda), \quad (6)$$

$$\frac{dy(t, \lambda)}{dt} = \lambda A(t)z(t, \lambda) + \lambda B y(t, \lambda) + p(t, \lambda), \quad (7)$$

$$y(0, \lambda) = y(\omega, \lambda), \quad (8)$$

$$z(0, \lambda) = z(\omega, \lambda), \quad (9)$$

где $p(t, \lambda) = f(t) + \lambda A(t)c(\lambda)$.

Условие (5) в этом случае соответствует методу Фурье и его модификации [6, гл. 4] при $A(t) \neq const$. Соотношение (4) определяет новые структурные свойства периодических решений линейных систем второго порядка. Тем самым, рассматриваемый подход позволяет использовать функциональные свойства матрицы $A(t)$. Задача (6)–(9), очевидно, эквивалентна задаче (2), (3) в представлении (4).

Используя уравнение (6) и функциональное условие (5), выведем векторное интегральное уравнение для функции $z(t, \lambda)$ на основе регуляризатора

$$\int_0^{\omega} A(\tau)z(\tau, \lambda)d\tau = \int_0^{\omega} A(\sigma)d\sigma z(t, \lambda) - \int_0^t \left(\int_0^{\tau} A(\sigma)d\sigma \right) dz(\tau, \lambda) + \int_t^{\omega} \left(\int_{\tau}^{\omega} A(\sigma)d\sigma \right) dz(\tau, \lambda).$$

Обозначим

$$\tilde{A}(\omega) = \int_0^{\omega} A(\sigma)d\sigma.$$

Тогда на основании условия (5) получим

$$\tilde{A}(\omega)z(t, \lambda) = \int_0^t \left(\int_0^{\tau} A(\sigma)d\sigma \right) dz(\tau, \lambda) - \int_t^{\omega} \left(\int_{\tau}^{\omega} A(\sigma)d\sigma \right) dz(\tau, \lambda). \quad (10)$$

Пусть

$$\det \tilde{A}(\omega) \neq 0. \quad (11)$$

Используя условие (11), из (10) в силу (6) получим

$$z(t, \lambda) = \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^t \left(\int_0^{\tau} A(\sigma)d\sigma \right) y(\tau, \lambda)d\tau - \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_t^{\omega} \left(\int_{\tau}^{\omega} A(\sigma)d\sigma \right) y(\tau, \lambda)d\tau$$

или в следующем виде:

$$z(t, \lambda) = \int_0^{\omega} K(t, \tau)y(\tau, \lambda)d\tau, \quad (12)$$

где

$$K(t, \tau) = \begin{cases} \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^{\tau} A(\sigma)d\sigma, & 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ -\tilde{A}^{-1}(\omega) \int_{\tau}^{\omega} A(\sigma)d\sigma, & 0 \leq t < \tau \leq \omega. \end{cases}$$

Перейдем к функции $y(t, \lambda)$. Для этого воспользуемся граничным условием (9), которое на основании (6) примет вид

$$\int_0^{\omega} y(\tau, \lambda) d\tau = 0. \quad (13)$$

Левую часть в соотношении (13) по аналогии с (5) запишем в виде

$$\int_0^{\omega} y(\tau, \lambda) d\tau = y(t, \lambda)\omega - \int_0^t \tau dy(\tau, \lambda) + \int_t^{\omega} (\omega - \tau) dy(\tau, \lambda).$$

Тогда (13) примет вид

$$y(t, \lambda) = \int_0^t \frac{\tau}{\omega} dy(\tau, \lambda) - \int_t^{\omega} \left(1 - \frac{\tau}{\omega}\right) dy(\tau, \lambda). \quad (14)$$

Соотношение (14) в силу (7) можно записать в виде

$$y(t, \lambda) = \int_0^t \frac{\tau}{\omega} [\lambda A(\tau)z(\tau, \lambda) + \lambda B y(\tau, \lambda) + p(\tau, \lambda)] d\tau - \\ - \int_t^{\omega} \left(1 - \frac{\tau}{\omega}\right) [\lambda A(\tau)z(\tau, \lambda) + \lambda B y(\tau, \lambda) + p(\tau, \lambda)] d\tau$$

или

$$y(t, \lambda) = \int_0^{\omega} \varphi(t, \tau) [\lambda A(\tau)z(\tau, \lambda) + \lambda B y(\tau, \lambda) + p(\tau, \lambda)] d\tau, \quad (15)$$

где

$$\varphi(t, \tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{\omega}, & 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ \frac{\tau}{\omega} - 1, & 0 \leq t < \tau \leq \omega. \end{cases}$$

Далее, воспользовавшись уравнением (7) и соотношениями (5), (8), (13), получим

$$\lambda \int_0^{\omega} A(\tau) d\tau c(\lambda) + \int_0^{\omega} f(\tau) d\tau = 0.$$

Отсюда на основании условия (11) получим при $\lambda \neq 0$

$$c(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^{\omega} f(\tau) d\tau. \quad (16)$$

Таким образом, при выполнении условия (11) всякое решение краевой задачи (2), (3) в представлении (4) является решением интегральной задачи (12), (15), (16).

Докажем обратное: всякое непрерывное решение задачи (12), (15), (16) является решением краевой задачи (2), (3). Дифференцируя тождества (12), (15), получим соответственно (6) и (7).

Установим, что решение полученной интегральной задачи удовлетворяет граничным условиям (8) и (9). Используя соотношение $dy(\tau, \lambda) = (\lambda A(\tau)z(\tau, \lambda) + \lambda B y(\tau, \lambda) + p(\tau, \lambda)) d\tau$ в тождестве (15) и выполняя интегрирование по частям, получим

$$y(t, \lambda) = \int_0^t \frac{\tau}{\omega} dy(\tau, \lambda) - \int_t^{\omega} \left(1 - \frac{\tau}{\omega}\right) dy(\tau, \lambda) = \frac{\tau}{\omega} y(\tau, \lambda) \Big|_0^t - \\ - \frac{1}{\omega} \int_0^t y(\tau, \lambda) d\tau - \left(1 - \frac{\tau}{\omega}\right) y(\tau, \lambda) \Big|_t^{\omega} - \frac{1}{\omega} \int_t^{\omega} y(\tau, \lambda) d\tau.$$

Отсюда на основании полученного соотношения (6) имеем (9).

Воспользуемся соотношением $dz(\tau, \lambda) = y(\tau, \lambda) d\tau$ в тождестве (12) и выполним интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} z(t, \lambda) &= \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) dz(\tau, \lambda) - \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) dz(\tau, \lambda) = \\ &= \tilde{A}^{-1}(\omega) \tilde{A}(\omega) z(t, \lambda) - \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^\omega A(\tau) z(\tau, \lambda) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда имеем интегральное условие (5).

Далее, интегрируя полученное соотношение (7), имеем при $t = \omega$

$$y(\omega, \lambda) - y(0, \lambda) = \lambda \int_0^\omega A(\tau) z(\tau, \lambda) d\tau + \lambda B \int_0^\omega y(\tau, \lambda) d\tau + \int_0^\omega p(\tau, \lambda) d\tau. \quad (17)$$

Используя (16), имеем

$$\int_0^\omega p(\tau, \lambda) d\tau = 0,$$

на основании изложенного выражение (17) примет вид (8).

Таким образом, полученная интегральная задача эквивалентна краевой задаче (2), (3) в представлении (4).

Решение системы уравнений (12), (15) будем искать в виде

$$z(t, \lambda) = z_0(t) + \lambda z_1(t) + \dots + \lambda^k z_k(t) + \dots, \quad (18)$$

$$y(t, \lambda) = y_0(t) + \lambda y_1(t) + \dots + \lambda^k y_k(t) + \dots. \quad (19)$$

Подставляя (18), (19) в (12), имеем

$$\begin{aligned} z_0(t) + \lambda z_1(t) + \dots + \lambda^k z_k(t) + \dots = \\ = \int_0^\omega K(t, \tau) [y_0(\tau) + \lambda y_1(\tau) + \dots + \lambda^k y_k(\tau) + \dots] d\tau, \end{aligned}$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим

$$z_k(t) = \int_0^\omega K(t, \tau) y_k(\tau) d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

Аналогично из уравнения (15) получим, используя (16), (19),

$$y_0(t) = \int_0^\omega \varphi(t, \tau) g(\tau) d\tau, \quad (21)$$

$$y_k(t) = \int_0^\omega \varphi(t, \tau) A(\tau) z_{k-1}(\tau) d\tau + B \int_0^\omega \varphi(t, \tau) y_{k-1}(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (22)$$

где $g(\tau) = f(\tau) - A(\tau) \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^\omega f(\tau) d\tau$.

Изучим вопрос сходимости рядов (18), (19). Введем следующие обозначения:

$$\alpha = \max_{0 \leq t \leq \omega} \|A(t)\|, \quad \beta = \|B\|, \quad \sigma = \max_{0 \leq t \leq \omega} \|g(t)\|, \quad \gamma = \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \|u\|_C = \max_{0 \leq t \leq \omega} \|u(t)\|,$$

где $u(t) \in \square \left([0, \omega], R^n \right)$, $\|\square\|$ – согласованная норма матрицы, например, любая из норм, приведённых в [10, с. 21].

Выполнив оценки по норме в (20), получим последовательно

$$\begin{aligned} \|z_k(t)\| &= \left\| \int_0^\omega K(t, \tau) y_k(\tau) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\| \left\{ \left\| \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) y_k(\tau) d\tau \right\| + \left\| \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) y_k(\tau) d\tau \right\| \right\} \leq \\ &\leq \gamma \left\{ \int_0^t \left\| \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) y_k(\tau) \right\| d\tau + \int_t^\omega \left\| \left(\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) y_k(\tau) \right\| d\tau \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma \left\{ \int_0^t \int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \left\| \|y_k(\tau)\| d\tau + \int_t^\omega \int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \left\| \|y_k(\tau)\| d\tau \right\} \leq \\
&\leq \gamma \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) \|y_k(\tau)\| d\tau + \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) \|y_k(\tau)\| d\tau \right\} \leq \\
&\leq \gamma \left(\int_0^t \alpha \tau \|y_k(\tau)\| d\tau + \int_t^\omega \alpha (\omega - \tau) \|y_k(\tau)\| d\tau \right) \leq \\
&\leq \gamma \left(\alpha \int_0^t \tau d\tau \|y_k\|_C + \alpha \int_t^\omega (\omega - \tau) d\tau \|y_k\|_C \right) = \\
&= \gamma \alpha \frac{1}{2} [t^2 + (\omega - t)^2] \|y_k\|_C \leq \gamma \alpha \frac{\omega^2}{2} \|y_k\|_C.
\end{aligned}$$

Отсюда следует рекуррентная оценка

$$\|z_k\|_C \leq \gamma \alpha \frac{\omega^2}{2} \|y_k\|_C, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

На основании (23) имеем

$$\|z_0\|_C + \varepsilon \|z_1\|_C + \dots + \varepsilon^k \|z_k\|_C + \dots \leq \gamma \alpha \frac{\omega^2}{2} (\|y_0\|_C + \varepsilon \|y_1\|_C + \dots + \varepsilon^k \|y_k\|_C + \dots).$$

Далее имеем из (21)

$$\begin{aligned}
\|y_0(t)\| &\leq \left\| \int_0^t \frac{\tau}{\omega} g(\tau) d\tau \right\| + \left\| \int_t^\omega \left(\frac{\tau}{\omega} - 1 \right) g(\tau) d\tau \right\| \leq \\
&\leq \int_0^t \frac{\tau}{\omega} \|g(\tau)\| d\tau + \int_t^\omega \left| \frac{\tau}{\omega} - 1 \right| \|g(\tau)\| d\tau \leq \int_0^t \frac{\tau}{\omega} d\tau \sigma + \int_t^\omega \left(1 - \frac{\tau}{\omega} \right) d\tau \sigma \leq \frac{\sigma \omega}{2}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|y_0\|_C \leq \frac{\omega \sigma}{2}. \quad (24)$$

Аналогично для $\|y_k(t)\|$ имеем, используя (22)

$$\begin{aligned}
\|y_k(t)\| &\leq \left\| \int_0^t \frac{\tau}{\omega} A(\tau) z_{k-1}(\tau) d\tau \right\| + \left\| \int_t^\omega \left(\frac{\tau}{\omega} - 1 \right) A(\tau) z_{k-1}(\tau) d\tau \right\| + \\
&+ \left\| B \int_0^t \frac{\tau}{\omega} y_{k-1}(\tau) d\tau \right\| + \left\| B \int_t^\omega \left(\frac{\tau}{\omega} - 1 \right) y_{k-1}(\tau) d\tau \right\| \leq \\
&\leq \int_0^t \left\| \frac{\tau}{\omega} A(\tau) z_{k-1}(\tau) \right\| d\tau + \int_t^\omega \left\| \left(\frac{\tau}{\omega} - 1 \right) A(\tau) z_{k-1}(\tau) \right\| d\tau + \\
&+ \int_0^t \left\| \frac{\tau}{\omega} B y_{k-1}(\tau) \right\| d\tau + \int_t^\omega \left\| \left(\frac{\tau}{\omega} - 1 \right) B y_{k-1}(\tau) \right\| d\tau \leq \\
&\leq \int_0^t \frac{\tau}{\omega} \|A(\tau)\| \|z_{k-1}(\tau)\| d\tau + \int_t^\omega \left| \frac{\tau}{\omega} - 1 \right| \|A(\tau)\| \|z_{k-1}(\tau)\| d\tau + \\
&+ \|B\| \int_0^t \frac{\tau}{\omega} \|y_{k-1}(\tau)\| d\tau + \|B\| \int_t^\omega \left| \frac{\tau}{\omega} - 1 \right| \|y_{k-1}(\tau)\| d\tau \leq \\
&\leq \int_0^t \frac{\tau}{\omega} \alpha \|z_{k-1}(\tau)\| d\tau + \int_t^\omega \left(1 - \frac{\tau}{\omega} \right) \alpha \|z_{k-1}(\tau)\| d\tau + \\
&+ \int_0^t \frac{\tau}{\omega} \beta \|y_{k-1}(\tau)\| d\tau + \int_t^\omega \left(1 - \frac{\tau}{\omega} \right) \beta \|y_{k-1}(\tau)\| d\tau \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^t \frac{\tau}{\omega} [\alpha \|z_{k-1}(\tau)\| + \beta \|y_{k-1}(\tau)\|] d\tau + \int_t^\omega \left(1 - \frac{\tau}{\omega}\right) [\alpha \|z_{k-1}(\tau)\| + \beta \|y_{k-1}(\tau)\|] d\tau \leq \\ &\leq \frac{\omega}{2} [\alpha \|z_{k-1}\|_C + \beta \|y_{k-1}\|_C]. \end{aligned}$$

Отсюда следует рекуррентная оценка

$$\|y_k\|_C \leq \frac{\omega}{2} (\alpha \|z_{k-1}\|_C + \beta \|y_{k-1}\|_C), \quad k=1,2,\dots \quad (25)$$

На основании (23) из (25) имеем следующую оценку:

$$\|y_k\|_C \leq q \|y_{k-1}\|_C, \quad k=1,2,\dots, \quad (26)$$

где

$$q = \frac{\omega}{2} \left(\gamma \alpha^2 \frac{\omega^2}{2} + \beta \right).$$

Из неявной оценки (26) имеем явную оценку

$$\|y_k\|_C \leq q^k \|y_0\|_C, \quad k=1,2,\dots \quad (27)$$

Используя оценку (27), получим из (23)

$$\|z_k\|_C \leq \gamma \alpha \frac{\omega^2}{2} q^k \|y_0\|_C, \quad k=0,1,2,\dots \quad (28)$$

Очевидно, при выполнении условия

$$0 < \varepsilon q < 1 \quad (29)$$

справедлива оценка ряда (19)

$$\|y_0\|_C + \varepsilon \|y_1\|_C + \dots + \varepsilon^k \|y_k\|_C + \dots \leq \frac{\|y_0\|_C}{1 - \varepsilon q}. \quad (30)$$

Аналогично на основании (28) получим мажорантный ряд для функционального ряда (18):

$$\|z_0\|_C + \varepsilon \|z_1\|_C + \dots + \varepsilon^k \|z_k\|_C \leq \gamma \alpha \omega^2 \frac{\|y_0\|_C}{2(1 - \varepsilon q)}. \quad (31)$$

Используя (24), из (30), (31) получим конструктивные оценки.

Таким образом, при выполнении условия (29) ряды (18), (19) сходятся равномерно по $t \in [0, \omega]$. Так как эти ряды сходятся равномерно, то на основании [11, с. 160], их суммы представляют собой решение системы интегральных уравнений (12), (15).

На основании изложенного справедлива

Теорема. Пусть выполнено условие (11). Тогда при $0 < |\lambda| < 1/q$ ω -периодическое решение системы (1) существует и единственно. Это решение представимо в виде (4), при этом справедливы оценки

$$\|z(t, \lambda)\| \leq \gamma \alpha \omega^2 \frac{\|y_0\|_C}{2(1 - \varepsilon q)}; \quad \|dz(t, \lambda)/dt\| \leq \frac{\|y_0\|_C}{1 - \varepsilon q}.$$

Эта теорема даёт не только коэффициентные условия существования и единственности периодического решения уравнения (1), но и удобный для применений алгоритм его построения. Благодаря соотношению (4), имеем важные структурные свойства решения, а также оценки областей локализации решения и его производной. Заметим, что только метод [7] даёт новые структурные свойства типа (4) ω -периодического решения.

Таким образом, при выполнении условия (11) система (1) имеет единственное ω -периодическое решение для достаточно малых значений $\varepsilon \neq 0$.

Замечание. Рассмотрение систем с переменной матрицей $B(t)$ периода ω не приводит к принципиальным трудностям в анализе задачи, а лишь связано с существенным увеличением объёма выкладок и усложнением соответствующего алгоритма [9].

Литература

1. Еругин, Н.П. Линейные системы дифференциальных уравнений с периодическими и квази-периодическими коэффициентами / Н.П. Еругин. – Минск : Изд-во АН БССР, 1963. – 272 с.
2. Гребеников, Е.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е.А. Гребеников, Ю.А. Рябов. – М. : Наука, 1979. – 431 с.
3. Проскуряков, А.П. Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний / А.П. Проскуряков. – М. : Наука, 1977. – 256 с.
4. Самойленко, А.М. Численно-аналитические методы исследования периодических решений / А.М. Самойленко, Н.И. Ронто. – Киев : Вища шк., 1976. – 180 с.
5. Бойчук, А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач / А.А. Бойчук. – Киев : Наукова думка, 1990. – 96 с.
6. Лаптинский, В.Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В.Н. Лаптинский. – Минск : Институт математики НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
7. Лаптинский, В.Н. Об одном подходе к отысканию периодических решений дифференциальных уравнений / В.Н. Лаптинский // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1990. – № 5. – С. 25–30.
8. Самойленко, А.М. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений / А.М. Самойленко, Н.И. Ронто. – Киев : Наукова думка, 1992. – 279 с.
9. Лаптинский, В.Н. Конструктивный анализ и структурные свойства периодических решений линейных многомерных систем второго порядка с параметром / В.Н. Лаптинский, Ю.М. Гребенцов. – Могилев : Могилевский гос. ун-т продовольствия, 2017. – 54 с. – (Препринт / ИТМ НАН Беларуси ; № 41).
10. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.
11. Рисс, Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М. : ИЛ, 1954. – 500 с.

¹Могилевский государственный университет продовольствия

²Институт технологии металлов НАН Беларуси

Поступила в редакцию 07.10.2019