

Л. А. БОКУТЬ

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ПРОБЛЕМЫ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ АЛГЕБР ЛИ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 28 II 1972)

В работе излагается доказательство следующей теоремы.

Теорема о неразрешимости. *Существует конечно определенная (к.о.) алгебра Ли L над произвольным полем F характеристики нуль, проблема равенства « $f=0$ в L ?» для которой алгоритмически неразрешима.*

Вопрос о существовании таких алгебр Ли был известен в литературе как проблема тождества для алгебр Ли, поставленная А. И. Ширшовым в работе ⁽¹⁾ (см. также ⁽⁸⁾). В этой же работе была доказана алгоритмическая разрешимость проблемы равенства для алгебр Ли с одним определяющим соотношением и для алгебр Ли с однородными соотношениями. Отметим, что методы работы ⁽¹⁾ постоянно используются в настоящей работе.

В основе доказательства теоремы о неразрешимости лежит идея вложения рекурсивно определенных алгебр Ли в конечно определенные. Как известно, эта идея применительно к группам берет начало в работе Г. Хигмана ⁽²⁾. Нетрудно заметить, что если M — рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество натуральных чисел, то алгебра Ли $L = \langle a, b, c; ab^m c = 0, m \in M \rangle$ имеет неразрешимую проблему равенства, так как $ab^n c = 0$ в L тогда и только тогда, когда $n \in M$. Отсутствие скобок здесь и ниже означает правонормированную расстановку скобок.

Вопрос, следовательно, состоит в том, чтобы доказать вложимость указанной алгебры, или аналогичной ей, в конечно определенную алгебру Ли. Эта идея и реализуется в настоящей работе.

Пусть $m \geq 3$ — фиксированное целое число, $x_1, \dots, x_m$ — переменные, принимающие натуральные значения. Рассмотрим формулы

$$\Phi = \bigwedge_{i=1}^s \Phi_i, \quad (1)$$

где Φ_i — произвольные элементарные формулы вида

$$x_i = c, \quad x_i = x_j, \quad x_i + x_j = x_k, \quad x_i - x_j = x_k,$$

где $c \geq 0, i < j < k$. Пусть

$$M_\Phi = \{(n_1, \dots, n_m) \mid \Phi(n_1, \dots, n_m) = \text{И}\}$$

— множество истинности формулы $\Phi(n_i \geq 0)$. Мы будем пользоваться следующим утверждением, которое непосредственно следует из теоремы Матиясевича ⁽³⁾ о диофантовости любого рекурсивно перечислимого множества.

Следствие из теоремы Матиясевича. *Для любого рекурсивно перечислимого множества M' натуральных чисел существует такое целое число $m \geq 3$ и такая формула Φ вида (1), что M' является проекцией множества M_Φ на последнюю координату: $M' = \{n_m \mid (n_1, \dots, n_m) \in M_\Phi\}$.*

Обозначим через A следующую алгебру Ли над некоторым полем F характеристики 0:

$$A = \langle a, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_m, f, d; b_i b_j = 0, c_i c_j = 0, c_i b_j = 0, i \neq j, f b_i = f c_i = 0, d c_i = d f = 0, 1 \leq i, j \leq m \rangle. \quad (2)$$

Положим для любой формулы Φ вида (1)

$$R_{\Phi} = \{ab_1^{n_1} \dots b_m^{n_m} c_1^{l_1} \dots c_m^{l_m} f^{l_{m+1}} d^{l_{m+2}}, \\ (n_1, \dots, n_m) \in M_{\Phi}, \quad l_i > 0, \quad 1 \leq i \leq m+2\}_{\text{sub}}. \quad (3)$$

Теорема о подходящих подалгебрах. Для любой формулы Φ вида (1) алгебра R_{Φ} является подходящей подалгеброй алгебры A .

Понятие подходящей подалгебры аналогично понятию подходящей (benign) подгруппы из работы (2). Ниже это понятие будет определено. Здесь же мы укажем только, что из свойства быть подходящей подалгеброй следует, в частности, что алгебра $A/\text{Ид}(R_{\Phi})$ вложима в к.о. алгебру Ли .

Пусть теперь множество M_{Φ} таково, что его проекция M' на m -ю координату является рекурсивным множеством. Рассмотрим фактор-алгебру $\bar{A}$ алгебры A , получающуюся из A добавлением соотношений $ab_i = a$, $1 \leq i \leq m-1$.

Образом подалгебры R_{Φ} при этом гомоморфизме является алгебра

$$\bar{R}_{\Phi} = \{ab_m^{n_m} c_1^{l_1} \dots c_m^{l_m} f^{l_{m+1}} d^{l_{m+2}}, \quad n \in M', \quad l_i > 0\}_{\text{sub}}.$$

Из основных свойств подходящих подалгебр вытекает, что подалгебра $\bar{R}_{\Phi}$ является подходящей в $\bar{A}$. Следовательно, алгебра

$$A_0 = \bar{A} / \text{Ид}(\bar{R}_{\Phi})$$

вложима в некоторую к.а. алгебру Ли K_0 . Проблема равенства в алгебре A_0 неразрешима, так как

$$ab_m^{n_m} c_1^{l_1} \dots c_m^{l_m} f d = 0 \quad \text{в} \quad A_0 \leftrightarrow n \in M'.$$

Следовательно, неразрешима и проблема равенства в к.о. алгебре K_0 . Это и устанавливает нужный нам результат. Заметим, что предложенное доказательство существования алгебры K_0 является конструктивным (алгебру K_0 в принципе можно построить).

Вернемся теперь к определению подходящих подалгебры конечно порожденных (к.п.) алгебр Ли . Пусть L — к.п. алгебра Ли над полем F , H — ее подалгебра. Назовем H подходящей в L ($H <_{\text{п}} L$), если существует к.о. алгебра Ли K , содержащая L , и к.п. подалгебра G алгебры K такие, что

$$G \cap L = H.$$

Оказалось, что как и в случае групп, имеют место следующие

Утверждения. 1) Подходящие подалгебры образуют подрешетку решетки всех подалгебр.

2) Если $H <_{\text{п}} L$, то алгебра $L / \text{Ид}(H)$ вложима в к.о. алгебру Ли .

3) Если $\varphi: L \rightarrow K$ суть гомоморфизм двух к.о. алгебр Ли L и K и $H <_{\text{п}} L$, то $\varphi(H) <_{\text{п}} K$.

Доказательство этих утверждений не является простым перенесением на случай алгебр Ли соответствующих групповых доказательств из работы (2). Одна из причин этого (по не единственная) заключается в том, что доказательство Хигмана предыдущих утверждений для групп построено, в частности, на постоянном использовании следующего известного утверждения.

Лемма (см. (4, 5)). Если G — группа, A и B — ее изоморфные подгруппы и $\varphi: A \rightarrow B$ — изоморфизм, то группа $(\bar{G} = \langle G, x; ax = x\varphi(a), a \in A \rangle)$ содержит G в качестве подгруппы.

Следовательно, в случае групп изоморфизм подгрупп может быть продолжен до внутреннего автоморфизма некоторой большей группы. Аналогичное этому утверждение для алгебр Ли уже оказывается не справедливым при следующем понимании внутренних автоморфизмов алгебры Ли . Пусть L — алгебра Ли над полем F характеристики нуль (или большей

$2(n-1)$, n — целое число), A — подалгебра L , d — дифференцирование L , нильпотентное степени n на A (т. е. $ad^n = 0$, $a \in A$). Тогда отображение

$$e^d = 1 + d + \frac{d^2}{2!} + \dots + \frac{d^{n-1}}{(n-1)!}$$

определено на A и является изоморфизмом алгебры A в подалгебру $B = Ae^d$ алгебры L . Назовем изоморфизм такого вида внутренним. Имеют место следующие утверждения, показывающие, что предыдущая лемма не является справедливой в случае алгебр Ли при определенном выше понимании внутреннего изоморфизма.

а) Если автоморфизм $\varphi: L \rightarrow L$ продолжается до внутреннего изоморфизма, то сам φ является внутренним.

б) Пусть L — некоторая алгебра Ли над полем характеристики нуль, $L^{(1)}$ — изоморфная ей алгебра Ли относительно изоморфизма $\varphi: a \rightarrow a^{(1)}$, $a \in L$, $L \oplus L^{(1)}$ — прямая сумма алгебр L и $L^{(1)}$. Если изоморфизм φ (рассматриваемый как изоморфизм подалгебр L и $L^{(1)}$ алгебры $L \oplus L^{(1)}$) продолжается до изоморфизма вида e^d , $ad^n = 0$, $n \leq 5$, $a \in L$, некоторой большей алгебры, то алгебра L является разрешимой (для $n \leq 6$ вопрос о разрешимости L остался открытым).

Однако в следующем случае изоморфизм подалгебр алгебры Ли можно продолжить до внутреннего.

в) Пусть $L = A * B$ — свободное произведение алгебр Ли A и B над полем F характеристики нуль, $A \cong C$, $B \cong C^{(1)}$ и $\varphi: C \rightarrow C^{(1)}$ — изоморфизм.

Тогда φ продолжается до внутреннего изоморфизма некоторой алгебры, содержащей L .

Это утверждение существенно используется при доказательстве высказанных выше свойств подходящих подалгебр. При доказательстве утверждения в), а также свойств 1 и 3 подходящих подалгебр применяется следующая теорема о представлении свободного квадрата алгебры Ли с объединенной подалгеброй, имеющая и самостоятельный интерес.

Теорема о представлении. Пусть L — алгебра Ли над F , B — ее подалгебра, F — поле характеристики нуль или большей $2(n-1)$, $n \geq 3$.

Тогда алгебра

$$\bar{L} = \langle L, d; ad^n = 0, a \in L, bd = 0, b \in B \rangle$$

содержит свободное произведение алгебр L и Le^d с объединенной подалгеброй $B = Be^d$.

Более точно, при доказательстве высказанных выше утверждений применяется

Следствие из теоремы о представлении. Пусть L — алгебра Ли над полем F характеристики нуль, $a_1, \dots, a_m$ — некоторая система порождающих L , B — подалгебра L , n — целое число, $n \geq 3$.

Тогда алгебра

$$\bar{L} = \langle L, d; a_i d^n = 0, 1 \leq i \leq m, bd = 0, b \in B \rangle$$

содержит свободное произведение алгебр L и Le^d с объединенной подалгеброй $B = Be^d$.

Именно в этом месте мы существенно используем, что характеристика исходного поля F равна нулю.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
22 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. И. Шпригов, Сибирск. матем. журн., **3**, 2, 291 (1962). ² G. Higman, Proc. Roy. Soc. A, **262**, 455 (1961). ³ Ю. В. Матиясевич, ДАН, **191**, № 2, 279 (1970). ⁴ G. Higman, B. Neumann, H. Neumann, J. London Math. Soc., **24**, 245 (1949). ⁵ П. С. Новиков, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, **44** (1955). ⁶ А. И. Шпригов, Матем. сборн., **45**, 2, 113 (1958). ⁷ А. И. Шпригов, Сибирск. матем. журн., **2**, 2, 297 (1962). ⁸ Днестровская тетрадь проблем по теории колец и модулей, Кишинев, 1969.