Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (117), 2019

УДК 519.872

Анализ ожидаемого дохода в открытой марковской сети обслуживания с ограниченным числом заявок и случайным временем их ожидания в очередях

Д.Я. Копать, М.А. Маталыцкий

Объектом исследования в данной статье является открытая марковская сеть массового обслуживания (СеМО) с доходами, ограниченным числом заявок и случайным их временем ожидания в очередях. Параметры обслуживания сети постоянны, маршрут заявок определяется произвольной стохастической матрицей вероятностей переходов. Заявки выбираются на обслуживание в соответствии с дисциплиной FIFO. Состояние сети описывается цепью Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний. С помощью асимптотического анализа при большом числе заявок найден полный ожидаемый доход в такой сети. Для этого выведено и решено дифференциальное уравнение в частных производных для плотности распределения ожидаемого дохода исследуемой сети. Получена и решена система обыкновенных дифференциальных уравнений для ожидаемого дохода сети, рассчитан модельный пример.
Ключевые слова: ожидаемый доход, диффузионная аппроксимация, ограниченное число заявок, плотность распределения ожидаемого дохода.

The object of research in this paper is an open Markov queueing network (QN) with revenues, with a bounded number of customer, random waiting time in the queue. The network service parameters are constant, the route of customers is determined by an arbitrary stochastic transition probability matrix. Customers are selected for service in accordance to the FIFO discipline. The network state is described by a Markov chain with continuous time and a finite number of states. With the help of asymptotic analysis the expected revenues in such a network have been found. A partial differential equation for the distribution density of the expected customers of the studied network is derived and solved. Systems of ordinary differential equations for the expected network customers have been obtained and solved. A model example has been calculated.
Keywords: expected revenues, diffusion approximation, limited number customers, distribution dencity for the expected revenue.

1. Введение. Постановка задачи. Рассмотрим открытую экспоненциальную сеть МО, общее число заявок в которой ограничено величиной K, состоящую из n СМО $S_0, S_1, \ldots, S_n$. Система S_i содержит m_i идентичных линий обслуживания, $i = \overline{1, n}$. Состояние сети описывается вектором

$$\vec{k}(t) = (k_1(t), k_2(t), \ldots, k_n(t)), \tag{1}$$

где $k_i(t)$ – число заявок в системе S_i в момент времени t, $i = \overline{1, n}$. В систему S_j поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda_{0i}, i = \overline{1, n}$. Если поступившая в S_j заявка находит хотя бы одну линию обслуживания свободной от других заявок, то она немедленно начинает обслуживаться и время обслуживания является показательной случайной величиной (СВ) с параметром $\mu_i(m_i, k_i(t))$, $i = \overline{1, n}$. В противном случае заявка становится в очередь и ожидает начала обслуживания, причём длительность обслуживания ограничена СВ, имеющей показательную функцию распределения с параметром $\theta_i(m_i, k_i(t))$, $i = \overline{1, n}$. Заявка, время ожидания которой в очереди S_i истекло, переходит в систему S_j с вероятностью q_{ij}, $q_{ii} = 0$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, n}$. После окончания обслуживания в системе S_i заявка немедленно поступает в систему S_j с вероятностью p_{ij}, $i, j = \overline{0, n}$, $p_{00} = 0$, $\sum_{j=0}^{n} p_{ij} = 1$, $i = \overline{0, n}$. Обозначим через $V(\vec{k}, t)$ − полный ожидаемый доход, который получит сеть за время t, если в начальный момент времени она находится в состоянии $(\vec{k}, t_0)$. Очевидно, что $V(\vec{k}, t) = \sum_{i=0}^{n} V_i(\vec{k}, t)$, где $V_i(\vec{k}, t)$ – ожидаемый доход, который получает система S_i за время t, если в начальный момент времени сеть находится в состоянии $\vec{k}$.

2. Разностно-дифференциальное уравнение для ожидаемого дохода сети. Рассмотрим все возможные переходы СеМО из состояния $(\vec{k},t)$ за короткий промежуток времени Δt:

– в случае 1) доход сети составит $R\Delta t+V\ \ \vec{k},t$, где R – доход сети в единицу времени, что соответствует сохранению размещения заявок по системах сети;

– в случае 2) доход сети составит $r_{0i}+V(\vec{k}-I_i,t)$;

– в случае 3):

если заявка покидает сеть, получив обслуживание в *i*-той СМО, то доход сети составит $-R_{i0}+V(\vec{k}+I_i,t)$;

если заявка покидает сеть по истечении времени ожидания в *i*-той СМО, то доход сети составит $-H_{i0}+V(\vec{k}+I_i,t)$;

– в случае 4):

если заявка перейдёт в *j*-тую СМО, получив обслуживание в *i*-той СМО, то доход сети составит $R_{ij}+V(\vec{k}+I_i-I_j,t)$;

если заявка перейдёт в *j*-тую СМО по истечении времени ожидания в *i*-той СМО, то доход сети составит $r_{ij}+V(\vec{k}+I_i-I_j,t)$;

– в случаях 5)−6) изменение дохода сети не произойдёт.

Используя формулу полной вероятности, получим следующую систему разностных уравнений для доходов:

$$V(\vec{k},t+\Delta t)=\ 1-\Big[\lambda_{0i}\ \ t\ \ +\sum_{j=1}^{n}\ \mu_j\ \ m_j,k_j\ \ t\ \ +\theta_j\ \ k_j\ \ t\ \ \ \ u\ \ k_j\ \ t\ \ \ \ \Big]\Delta t+o\ \ \Delta t\ \ \Big\}\times$$

$$\times\Big[R\Delta t+V(\vec{k},t)\Big]+\sum_{i=1}^{n}\ \ \mu_i\ \ m_i,k_i\ \ t\ \ u\ \ k_i\ \ t\ \ \ p_{i0}\ \ t\ \ \Delta t+o\ \ \Delta t\ \ \ \times$$

$$\times\Big[-R_{i0}+V(\vec{k}+I_i,t)\Big]+\ \theta_i\ \ m_i,k_i\ \ t\ \ \ u\ \ k_i\ \ t\ \ \ q_{i0}\Delta t+o\ \ \Delta t\ \ \ \times$$

$$\times\Big[-H_{i0}+V_i(\vec{k}+I_i,t)\Big]+\ \lambda_{0i}+o\ \ \Delta t\ \ \ \Big[r_{0i}+V(\vec{k}-I_i,t)\Big]\ +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\ \mu_i\ \ m_i,k_i\ \ t\ \ \ u\ \ k_i\ \ t\ \ \ \ p_{ij}\ \ t\ \ \Delta t+o\ \ \Delta t\ \ \ \Big[R_{ij}+V(\vec{k}+I_i-I_j,t)\Big]+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\ \theta_i\ \ m_i,k_i\ \ t\ \ \ u\ \ k_i\ \ t\ \ \ \ q_{ij}\ \ t\ \ \Delta t+o\ \ \Delta t\ \ \ \Big[r_{ij}+V(\vec{k}+I_i-I_j,t)\Big]+o\ \ \Delta t\ \ .$$

Перенеся $V(\vec{k},t+\Delta t)$ в левую часть уравнения, поделив обе части полученного равенства Δt и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получаем следующее утверждение:

Теорема 1. *Ожидаемый доход сети удовлетворяют следующему РДУ:*

$$\frac{dV(\vec{k},t)}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\Big[\mu_i\ \ m_i,k_i\ \ t\ \ \ u\ \ k_i\ \ t\ \ \ \ p_{i0}\ \ t\ \ \ V(\vec{k}+I_i,t)-V(\vec{k},t)\ \ +$$

$$+\theta_i\ \ m_i,k_i\ \ t\ \ \ u\ \ k_i\ \ t\ \ \ \ q_{i0}\ \ V(\vec{k}+I_i,t)-V(\vec{k},t)\ \ +\ \lambda_{0i}\ \ V(\vec{k}-I_i,t)-V(\vec{k},t)\ \ \Big]+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i\ \ m_i,k_i\ \ t\ \ \ u\ \ k_i\ \ t\ \ \ \ p_{ij}\ \ t\ \ \ V(\vec{k}+I_i-I_j,t)-V(\vec{k},t)\ \ +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\theta_i\ \ m_i,k_i\ \ t\ \ \ u\ \ k_i\ \ t\ \ \ \ q_{ij}\ \ t\ \ \ V(\vec{k}+I_i-I_j,t)-V(\vec{k},t)\ \ +$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\Big[R_{i0}\mu_i\ \ m_i,k_i\ \ t\ \ \ u\ \ k_i\ \ t\ \ \ \ p_{i0}\ \ t\ \ -H_{i0}\theta_i\ \ m_i,k_i\ \ t\ \ \ u\ \ k_i\ \ t\ \ \ \ p_{i0}+r_{0i}\lambda_{0i}\ \ t\ \ \ \ \Big]+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}R_{ij}\mu_i\ \ m_i,k_i\ \ t\ \ \ u\ \ k_i\ \ t\ \ \ \ p_{ij}\ \ t\ \ +\sum_{i,j=1}^{n}r_{ij}\theta_i\ \ m_i,k_i\ \ t\ \ \ u\ \ k_i\ \ t\ \ \ \ q_{ij}\ \ t\ \ +\ R. \qquad (2)$$

3. Уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка для плотности распределения дохода. Решить РДУ (2) аналитически при большом числе n не представляется возможным. Исследование этой системы будем проводить, используя методику, описанную в [1]–[4]. Перейдем к относительным переменным и будем исследовать вектор $\xi(t)=\left(\frac{k_1\ t}{K},\frac{k_2\ t}{K},...,\frac{k_n\ t}{K}\right)$. Возможные значения вектора $\xi(t)$ принадлежат ограниченному замкнутому множеству $G=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n):\ x_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^{n}x_i\le 1\right\}$, в котором они располагаются в узлах n-мерной решетки на расстоянии $\varepsilon=\frac{1}{K}$ друг от друга. При увеличении значений K «плотность заполнения» множества G возможными значениями рассматриваемого вектора $\xi(t)$ увеличивается, и становится возможным считать, что он имеет непрерывное распределение в области G. При этих предположениях можно считать, что полный ожидаемый доход сети непрерывно изменяется в зависимости от начального состояния $(\vec{x},t)$. Поэтому можем ввести в рассмотрение функцию плотности распределения (концентрации) ожидаемого дохода $\rho(\vec{x},t)$ в области G. По аналогии, например, с плотностью распределения массы:

$$\rho=\frac{m}{V}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{m(x_1\le\xi_{n+1}\le x_1+\varepsilon,...,x_n\le\xi_{2n}\le x_n+\varepsilon)}{\varepsilon^n},$$

плотность распределения дохода определяется как следующий предел:

$$\rho(\vec{x},t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{V\ \ x_1\le\xi_{n+1}\le x_1+\varepsilon,,...,x_n\le\xi_{2n}\le x_n+\varepsilon}{\varepsilon^n}. \tag{3}$$

Очевидно, что плотность распределения дохода $\rho(\vec{x},t)$ по аналогии с плотностью распределения вероятности будет обладать следующими свойствами:

1) $\iint\limits_G ... \int\rho(\vec{x},t)dx=V_{sum}$;

2) доход сети при условии изменения вектора состояния сети по области D:

$$V(\xi\in D,t)=\iint\limits_D ... \int\rho(\vec{x},t)d\vec{x}.$$

Кроме того, доход сети в определенном состоянии $\xi(t)=(x_1,x_2,...,x_n)$:

$$V(\xi,t)\big|_{\xi(t)=(x_1,x_2,...,x_n)}=0.$$

Из (3) следует, что для $V(\vec{k},t)$ справедлива следующая аппроксимация при $K\to\infty$:

$$V(\vec{k},t)=V(\vec{x}K,t)=\varepsilon^n\rho(\vec{x},t)\ \text{ или }\ \rho(\vec{x},t)=K^nV(\vec{x}K,t). \tag{4}$$

Тогда $\frac{\partial V(\vec{k},t)}{\partial t}=\frac{\partial(\varepsilon^n\rho(\vec{x},t))}{\partial t}=\varepsilon^n\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t}$. Кроме того, при $K\to\infty$ доходы R, R_{i0}, H_{i0}, r_{0i}, R_{ij}, r_{ij}, удовлетворяют следующим асимптотическим равенствам

$$K^nR=r,\ K^nr_{0i}=r_{0i}^1,\ K^nR_{i0}=R_{i0}^1,\ K^nR_{ij}=R_{ij}^1,\ K^nH_{i0}=H_{i0}^1,\ K^nr_{ij}=r_{ij}^1. \tag{5}$$

Уравнение (2) для плотности распределения дохода с учетом (5), (4) может быть представлено в виде:

$$\frac{\partial\rho\ \ \vec{x},t}{\partial t}=K\Bigg[\sum_{i=1}^{n}\Big[\mu_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ p_{i0}\ \ t\ \ \ \rho\ \ \vec{x}+e_i,t\ -\rho\ \ \vec{x},t\ \ +$$

$$+\theta_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ u\ \ x_i\ \ t\ \ \ q_{i0}\ \ \rho\ \ \vec{x}+e_i,t\ -\rho\ \ \vec{x},t\ \ +\lambda_{0i}\ \ \rho\ \ \vec{x}-e_i,t\ -\rho\ \ \vec{x},t\ \ \Big]+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ p_{ij}\ \ t\ \ \ \rho\ \ \vec{x}+e_i-\varepsilon_j,t\ -\rho\ \ \vec{x},t\ \ +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\theta_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ q_{ij}\ \ t\ \ \ \rho\ \ \vec{x}+e_i-e_j,t\ -\rho\ \ \vec{x},t\ \ +$$

$$-R^{1}_{i0}\mu_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ p_{i0}\ \ t\ -H^{1}_{i0}\theta_i\ \ x_i\ \ t\ \ \ p_{i0}+r^{1}_{0i}\lambda_{0i}\ \ t\ \ +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}R^{1}_{ij}\mu_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ u\ \ x_i\ \ t\ \ \ p_{ij}\ \ t\ +\sum_{i,j=1}^{n}r^{1}_{ij}\theta_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ u\ \ x_i\ \ t\ \ \ q_{ij}\ \ t\ +r\Bigg], \qquad (6)$$

где $e_i=\varepsilon I_i$, $i=\overline{1,n}$. Полагая, что $\rho\ \ \vec{x},t$ дифференцируема по t и дважды кусочно-непрерывно дифференцируема по x_i, $i=\overline{1,n}$, разложим функции $\rho(\vec{x}+e_i-e_j,t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(\vec{x},t)$, используя члены до второго порядка включительно:

$$\rho\ \ \vec{x}\pm e_i,t\ =\rho\ \ \vec{x},t\ \pm\varepsilon\frac{\partial\rho\ \ \vec{x},t}{\partial x_i}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2\rho\ \ \vec{x},t}{\partial x_i^2}+o\ \ \varepsilon^2\ ,$$

$$\rho\ \ \vec{x}+e_i-e_j,t\ =\rho\ \ \vec{x},t\ +\varepsilon\left(\frac{\partial\rho\ \ \vec{x},t}{\partial x_i}-\frac{\partial\rho\ \ \vec{x},t}{\partial x_j}\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2\rho\ \ \vec{x},t}{\partial x_i^2}+2\frac{\partial^2\rho\ \ \vec{x},t}{\partial x_i\,x_j}+\frac{\partial^2\rho\ \ \vec{x},t}{\partial x_j^2}\right)+o\ \ \varepsilon^2\ .$$

Поэтому уравнение (6) можно записать в виде:

$$\frac{\partial\rho\ \ \vec{x},t}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\mu_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ p_{i0}\ \ t\ \left(\frac{\partial\rho\ \ \vec{x},t}{\partial x_i}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2\rho\ \ \vec{x},t}{\partial x_i^2}+o\ \ \varepsilon^2\ \right)+$$

$$+\theta_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ q_{i0}\left(\frac{\partial\rho\ \ \vec{x},t}{\partial x_i}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2\rho\ \ \vec{x},t}{\partial x_i^2}+o\ \ \varepsilon^2\ \right)+$$

$$+\lambda_{0i}\left(-\frac{\partial\rho\ \ \vec{x},t}{\partial x_i}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2\rho\ \ \vec{x},t}{\partial x_i^2}+o\ \ \varepsilon^2\ \right)\Bigg]+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ u\ \ x_i\ \ t\ \ \ p_{ij}\ \ t\ \times$$

$$\times\left(\left(\frac{\partial\rho\ \ \vec{x},t}{\partial x_i}-\frac{\partial\rho\ \ \vec{x},t}{\partial x_j}\right)+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x_i^2}-2\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x_j^2}\right)\right)+o\ \ \varepsilon^2\ \ \Bigg)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\theta_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ u\ \ x_i\ \ t\ \ \ q_{ij}\ \ t\ \times$$

$$\times\left(\left(\frac{\partial\rho\ \ \vec{x},t}{\partial x_i}-\frac{\partial\rho\ \ \vec{x},t}{\partial x_j}\right)+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x_i^2}-2\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x_j^2}\right)\right)+o\ \ \varepsilon^2\ \ \Bigg)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\Big[-R^{1}_{i0}\mu_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ u\ \ x_i\ \ t\ \ \ p_{i0}\ \ t\ -H^{1}_{i0}\theta_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ u\ \ x_i\ \ t\ \ \ p_{i0}+\lambda_{0i}r^{1}_{0i}\ \Big]+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}R^{1}_{ij}\mu_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ u\ \ x_i\ \ t\ \ \ p_{ij}\ \ t\ +\sum_{i,j=1}^{n}r^{1}_{ij}\theta_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ u\ \ x_i\ \ t\ \ \ q_{ij}\ \ t\ +r\Bigg].$$

Таким образом, получили следующее утверждение.

Теорема 2. *Плотность распределения дохода сети с точностью до* $O\ \ \varepsilon^2$ *удовлетворяет следующему уравнению в частных производных*

$$\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}A_i\,(\vec{x},t)\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial x_i}+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}\,(\vec{x},t)\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\Big[R^{1}_{i0}\mu_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ u\ \ x_i\ \ t\ \ \ p_{i0}\ \ t\ -H^{1}_{i0}\theta_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ u\ \ x_i\ \ t\ \ \ p_{i0}+r^{1}_{0i}\lambda_{0i}\Big]+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}R^{1}_{ij}\mu_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ u\ \ x_i\ \ t\ \ \ p_{ij}\ \ t\ +\sum_{i,j=1}^{n}r^{1}_{ij}\theta_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ u\ \ x_i\ \ t\ \ \ q_{ij}\ \ t\ +r, \qquad (7)$$

где

$$A_i(\vec{x},t)=\mu_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ p_{i0}+\theta_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ q_{i0}+\lambda_{0i}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\mu_j\ \ l_j,x_j\ \ t\ \ \ p^{*}_{ji}\ \ t\ +\theta_j\ \ l_j,x_j\ \ t\ \ \ u\ \ x_j\ \ t\ \ \ q^{*}_{ji}\ \ t\ .$$

$$B_{ij}(\vec{x},t)=\sum_{j=0}^{n}\mu_j\ \ l_j,x_j\ \ t\ \ \ p^{**}_{ji}\ \ t\ +\theta_j\ \ l_j,x_j\ \ t\ \ \ u\ \ x_j\ \ t\ \ \ q^{**}_{ji}\ \ t\ ,$$

$$p^{*}_{ji}=\begin{cases}p_{ji},\ j\neq i,\\ p_{ii}-1,\ j=i,\end{cases}\quad p^{**}_{ji}=\begin{cases}p_{ji},\ j\neq i,\\ 1-p_{ii},\ i=j,\end{cases}\quad q^{*}_{ji}=\begin{cases}q_{ji},\ j\neq i,\\ q_{ii}-1,\ j=i,\end{cases}\quad q^{**}_{ji}=\begin{cases}q_{ji},\ j\neq i,\\ 1-q_{ii},\ j=i.\end{cases}$$

4. Нахождение ожидаемого дохода сети. Учитывая, что $B_{ij}(\vec{x},t),$ представляют собой функции порядка $O\ \ \varepsilon$, выражение $\dfrac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}(\vec{x},t)\dfrac{\partial^2\rho(\vec{x},t)}{\partial x_i\partial x_j}$ можно отнести к $O(\varepsilon^2)$. Поэтому уравнение (7) с точностью до $O(\varepsilon^2)$ запишется в виде:

$$\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}A_i(\vec{x},t)\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial x_i}--\sum_{i=1}^{n}\Big[R^{1}_{i0}\mu_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ p_{i0}\ \ t\ -H^{1}_{i0}\theta_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ p_{i0}+\lambda_{i0}r^{1}_{0i}\ \Big]+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}R^{1}_{ij}\mu_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ p_{ij}\ \ t\ +\sum_{i,j=1}^{n}\theta_j\ \ l_j,x_j\ \ t\ \ \ q_{ji}\ \ t\ r^{1}_{ji}+r. \tag{8}$$

Проинтегрировав обе части этого уравнения по $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ в области G и разделив обе части уравнения на объем области G, равный $m(G)$, получим:

$$\frac{1}{m(G)}\iint\limits_{G}...\int\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t}d\vec{x}=-\frac{1}{m(G)}\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{G}...\int A_i(\vec{x},t)\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial x_i}d\vec{x}-$$

$$-\frac{K}{m(G)}\sum_{i=1}^{n}\Bigg[R^{1}_{i0}\,p_{i0}\ \ t\ \ \iint\limits_{G}...\int\mu_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ d\vec{x}-H^{1}_{i0}\,p_{i0}\iint\limits_{G}...\int\theta_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ d\vec{x}+r^{1}_{0i}\lambda_{0i}\Bigg]+$$

$$+\frac{K}{m(G)}\sum_{i,j=1}^{n}R^{1}_{ij}\,p_{ij}\ \ t\ \ \iint\limits_{G}...\int\mu_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ d\vec{x}+\frac{K}{m(G)}\sum_{i,j=1}^{n}q_{ji}\ \ t\ \ r^{1}_{ji}\iint\limits_{G}...\int\theta_j\ \ l_j,x_j\ \ t\ \ \ d\vec{x}+r.$$

Будем считать, что в левой части этого равенства допустима перемена порядка интегрирования и дифференцирования (мы предполагаем, что в замкнутой области G функция $\rho(\vec{x},t)$ является непрерывной):

$$\frac{1}{m(G)}\iint\limits_{G}...\int\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t}d\vec{x}=\frac{1}{m(G)}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{G}...\int\rho(\vec{x},t)d\vec{x}=\frac{d}{dt}\overline{v_G}(t),$$

где $\overline{v_G}(t)$ – среднее по $\vec{x}$ значение дохода при условии изменения начального состояния $(\vec{x},t)$ в области G.

Рассмотрим интегралы в правой части (8). При расчете этих интегралов используем интегрирование по частям, а также предположим, что выполняются граничные условия:

$$A_i(\vec{x},t)\,\rho(\vec{x},t)\big|_{\vec{x}\in\Gamma(G)}=0,\ i=\overline{1,n},$$

где $\Gamma(G)$ – граница области G, т. е. $A_i(\vec{x},t)\,\rho(\vec{x},t)\Big|_{x_i=0}^{x_i=1-x_1-x_2-...-x_{i-1}-x_{i+1}...-x_{n-1}}=0$, которые означают, что не допускается поток дохода через границу области G или, что в граничных точках области G поставлены отражающие экраны. Тогда, учитывая, что $\dfrac{\partial A_i(\vec{x},t)}{\partial x_i}$ не зависят от x_j, $j=\overline{1,n}$, получаем:

$$\frac{1}{m(G)}\iint\limits_{G}...\int A_i\ \ \vec{x},t\ \ \frac{\partial v\ \ \vec{x},t}{dt}d\vec{x}=-\frac{\partial A_i\ \ \vec{x},t}{\partial x_i}\overline{v_G}\ \ t\ \ ,i=\overline{1,n}.$$

Из курса математического анализа известно [5], что $m(G)=\dfrac{1}{n!}$. Таким образом приходим к следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}\overline{v_G}(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_i(\vec{x},t)}{\partial x_i}\overline{v_G}(t)-$$

$$-Kn!\sum_{i=1}^{n}\left[R_{i0}^{1}\,p_{i0}\ \ t\ \ \iint\limits_{G}\ldots\int\mu_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ d\vec{x}-H_{i0}^{1}\,p_{i0}\iint\limits_{G}\ldots\int\theta_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ d\vec{x}+r_{i0}^{1}\,\lambda_{0i}\right]+$$

$$+Kn!\sum_{i,j=1}^{n}R_{ij}^{1}\,p_{ij}\ \ t\ \ \iint\limits_{G}\ldots\int\mu_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ d\vec{x}+Kn!\sum_{i,j=1}^{n}q_{ji}\ \ t\ \ r_{ji}^{1}\iint\limits_{G}\ldots\int\theta_j\ \ l_j,x_j\ \ t\ \ \ d\vec{x}+r.$$

Его решение имеет вид [4]:

$$\overline{v_G}(t)=e^{\int_0^t\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_i(\vec{x},z)}{\partial x_i}dz}\ \ \overline{v_G}(0)-$$

$$-Kn!\sum_{i=1}^{n}\left[R_{i0}^{1}\,p_{i0}\ \ t\ \ \iint\limits_{G}\ldots\int\mu_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ d\vec{x}-H_{i0}^{1}\,p_{i0}\iint\limits_{G}\ldots\int\theta_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ \ d\vec{x}+r_{0i}^{1}\,\lambda_{0i}\right]+$$

$$\left.+Kn!\sum_{i,j=1}^{n}R_{ij}^{1}\,p_{ij}\ \ t\ \ \iint\limits_{G}\ldots\int\mu_i\ \ l_j,x_i\ \ t\ \ \ d\vec{x}+Kn!\sum_{i,j=1}^{n}q_{ji}\ \ t\ \ r_{ji}^{1}\iint\limits_{G}\ldots\int\theta_j\ \ l_j,x_j\ \ t\ \ \ d\vec{x}+r\right). \qquad (9)$$

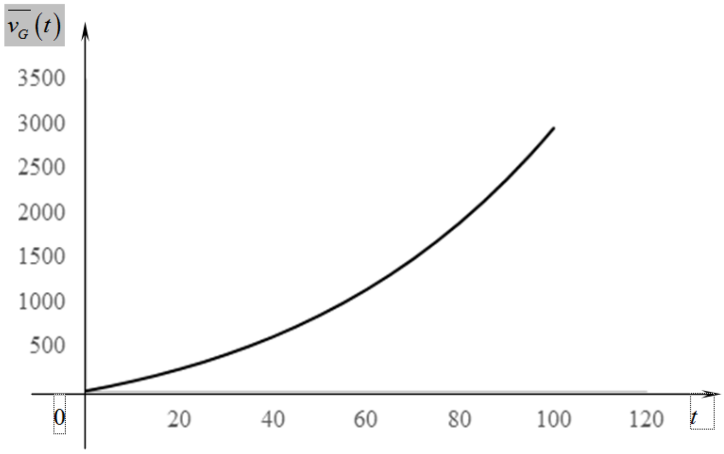

Рисунок – График ожидаемого дохода сети на интервале времени [0; 100]

Пример 1. Рассмотрим сеть, состоящую из $n = 4$ СМО, количество заявок в которой ограничено величиной $K = 10000$. Количество линий обслуживания в каждой из систем равно $m_1=2, m_2=3, m_3=1, m_4=4.$ Интенсивности поступления заявок равны $\lambda_{01}=7,\lambda_{02}=5,\lambda_{03}=4,\lambda_{04}=2.$ Доходы от поступления заявок равны $r_{0i}^{1}=5, i=\overline{1,4}.$ Доход от сохранения состояния сети равен $r = 5$. Выражения для интенсивности обслуживания имеют вид: $\mu_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ =l_i x_i\ \ t\ \ , i=\overline{1,4}$. Параметр ф.р. времени ожидания начала обслуживания имеет вид: $\theta_i\ \ l_i,x_i\ \ t\ \ =0,3l_i x_i\ \ t\ \ , i=\overline{1,4}$. Вероятности переходов заявок после завершения обслуживания и времени ожидания равны

$$q_{20}=p_{20}=0,4,$$

$$q_{31}=p_{31}=0,1, q_{21}=p_{21}=0,1, q_{23}=p_{23}=p_{24}=q_{24}=0,25; q_{30}=p_{30}=0,4, p_{10}=q_{10}=0,3,\ q_{40}=$$
$$=p_{40}=0,3, q_{41}=p_{41}=0,1,\ q_{42}=p_{42}=0,3, p_{10}=q_{10}=0,3,\ \ q_{12}=p_{12}=0,2,\ \ q_{13}=p_{13}=$$
$$=0,25, q_{14}=p_{14}=0,25, q_{43}=p_{43}=0,3, q_{13}=q_{14}=p_{13}=p_{14}=0,25,\ q_{32}=p_{32}=0,3$$

Доходы от таких переходов:

$$R_{ij}^{1}=i\ \ \ j+1\ \ , i,j=\overline{1,4},\ r_{ij}^{1}=0,5i\ \ \ j+1\ \ ,\ i,j=\overline{1,4},\ \ H_{i0}^{1}=0,5i,\ \ .$$

Положим также $\overline{v_G}(0)=0.$ На рисунке представлен график ожидаемого дохода сети на интервале времени [0; 100].

Литература

1. Медведев, Г.А. Замкнутые системы массового обслуживания и их оптимизация / Г.А. Медведев // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1978. – № 6. – С. 199–203.
2. Китурко, О.М. Асимптотический анализ общего ожидаемого дохода замкнутой структуры массового обслуживания с однотипными заявками и ее применение / О.М. Китурко, М.А. Маталыцкий, Т.В. Русилко // Вестник ГрГУ. Серия 2. Математика, физика, информатика, вычислительная техника и управление. – 2013. – № 2. – С. 99–111.
3. Китурко, О.М. Асимптотический анализ доходов в замкнутой НМ-сети с переменным числом приоритетных и бесприоритетных заявок / О.М. Китурко, М.А. Маталыцкий // Вестник Томского государственного университета. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2014. – № 3. – С. 38–44.
4. Маталыцкий, М.А. Математический анализ НМ-сетей и их применение в транспортной логистике: монография / М.А. Маталыцкий, О.М. Китурко. – Гродно : ГрГУ им. Я. Купалы, 2015. – 231 с.
5. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Рипол Классик, 1955. – Т. 3. – С. 674–675.

Гродненский государственный
университет им. Я. Купалы

Поступила в редакцию 10.10.2019