

В. Б. ГЛАСКО

**К ВОПРОСУ О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
О ВОССТАНОВЛЕНИИ СТРУКТУРЫ ЗЕМНОЙ КОРЫ
ПО ДИСПЕРСИОННОМУ СПЕКТРУ ВОЛН РЭЛЕЯ**

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 23 II 1972)

1. Существует ряд возможных причин неоднозначности при практическом решении рассматриваемой задачи интерпретации. К ним относятся погрешность физической модели структуры, практическая эквивалентность результатов интерпретации в рамках погрешности входных данных, различная степень устойчивости применяемых алгоритмов, наконец, отсутствие единственности решения в строгом смысле. Выяснение последнего вопроса имеет принципиальное значение как для понимания природы практической неоднозначности, так и для разработки устойчивых алгоритмов решения соответствующей задачи интерпретации.

Примером служат исследования метода магнито-теллурического зондирования; его обоснование с точки зрения единственности решения, данное в ⁽¹⁾, послужило началом для разработки регуляризирующих ⁽²⁾ алгоритмов, пригодных для ЭВМ ^(3, 4).

Дисперсионные данные поверхностных волн используются для прогнозов, в частности, региональных структур довольно давно ^(5, 6). Однако исследования соответствующей проблемы единственности проведены лишь в последнее время. В работе ⁽⁷⁾ рассматривалась задача о восстановлении региональных плоско-слоистых структур по дисперсии основного тона волн Лява. Оказалось, что эта задача имеет единственное решение по крайней мере для реальных структур: $b_1 = \min_{1 \leq i \leq n+1} b_i$. В работе ⁽⁸⁾ рассмотрена проблема единственности для совместной интерпретации основного тона дисперсионных волн Рэлея и Лява; в работе ⁽⁹⁾ эта проблема рассматривалась для интерпретации дисперсии основного тона волны Рэлея на множества классических структур земной коры.

Имеется еще одно исследование проблемы единственности в смежной области — прогнозирование глобальной структуры оболочки Земли по дисперсии поверхности волн Лява ⁽¹⁰⁾.

В настоящей работе указанная проблема рассматривается для задачи интерпретации совокупности дисперсионных кривых поверхностных волн Рэлея в классе плоско-слоистых региональных структур.

Общая методика исследования, как и в упомянутых работах, отвечает работе ⁽¹⁾.

2. Как и в ^(8, 9), введем полную совокупность существенных параметров n -слойной структуры (на упругом полупространстве): $\mathbf{p}^{(n)} = \{n, b_i, a_i, (i = 1, 2, \dots, n+1), v_i, h_i, (i = 1, 2, \dots, n)\}$, где b_i — скорость волн сдвига, a_i — скорость волн сжатия в i -м слое*, $v_i = \mu_i / \mu_{i+1}$, μ_i — модуль сдвига в i -м слое; h_i — толщина слоя.

Легко убедиться, что единственность решения задачи интерпретации возможна лишь относительно указанной, или эквивалентной ей, в силу связи $b_i^2 \rho_i = \mu_i$, ρ_i — плотность, — совокупности параметров. Тем самым

* При практической интерпретации обычно принимается, в силу соотношения Пуассона, $a_i = \sqrt{3}b_i$; однако, по определению, $a_i > b_i$ всегда.

для однозначного определения упруго-плотностного разреза заведомо необходима минимальная дополнительная информация, например, знание плотности (жесткости) в верхнем слое.

В дальнейшем мы опираемся на следующее разложение структуры на элементы: $\mathbf{p}^{(n)} = \{n, \mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{q}^{(1)}, \dots, \mathbf{q}^{(n)}\}$, где $\mathbf{q}^{(0)} = \{a_1, b_1\}$, $\mathbf{q}^{(j)} = \{v_j, h_j, a_{j+1}, b_{j+1}\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, а также представление структуры в виде конечной последовательности «вложенных»: $\mathbf{p}^{(0)} \subset \mathbf{p}^{(1)} \subset \dots \subset \mathbf{p}^{(n)}$.

Рассмотрим результаты, относящиеся к «прямой» задаче о дисперсии волн Рэлея, решение которой (совокупность «дисперсионных кривых») мы отождествляем с множеством зависящих от частоты ω собственных значений λ соответствующей краевой задачи ⁽⁹⁾: $\lambda = \lambda(\omega) = 1/c^2(\omega)$, где c — фазовая скорость волны Рэлея.

Лемма 1. *Дисперсионное уравнение для волн Рэлея в рассматриваемой плоской-слоистой структуре тождественно представимо в следующей аддитивной форме:*

$$\Lambda_n(\lambda, \omega, \mathbf{p}^{(n)}) \equiv \Lambda_j(\lambda, \omega, \mathbf{p}^{(j)}) + \sum_{s=j+1}^n F_s(\lambda, \omega, \mathbf{p}^{(s)}) e^{-\omega w_s(\lambda, \mathbf{p}^{(s)})} = 0, \quad (1)$$

где j — любое целое, $0 \leq j \leq n-1$; $\Lambda_j(\lambda, \omega, \mathbf{p}^{(j)}) = 0$ — дисперсионное уравнение для структуры $\mathbf{p}^{(j)}$; F_s — некоторые сложные функции λ и параметров $(\mathbf{p}^{(s)})$, причем существуют области $G_k\{\lambda_k^{(1)}(\omega) \leq \lambda \leq \lambda_k^{(2)}(\omega), \omega_k^0 < \omega < \infty\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, в которых F_s ограничены вместе с двумя производными по λ при $\omega \rightarrow \infty$;

$$w_s(\lambda, \mathbf{p}^{(s)}) \equiv 2 \sum_{m=1}^s \kappa_m h_m, \quad \kappa_m \equiv \sqrt{\lambda - b_m^{-2}}. \quad (2)$$

Заметим, что для величин F_s можно написать явное, достаточно громоздкое выражение типа цепных дробей, откуда следуют их асимптотические ($\omega \rightarrow \infty$) представления. Последние получены при ограничении

$$a_1 = \min_{1 \leq i \leq n+1} a_i, \quad b_i = \min_{1 \leq i \leq n-1} b_i \quad (3)$$

на класс структур и оказываются несколько различными в области $G_0\{\lambda: \lambda \geq b_1^{-2} + \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ и в прочих $G_k \subset G^*$, где $G^*\{\lambda: b_1^{-2} > \lambda > \max_{2 \leq i \leq n+1} [a_i^{-2}, \max b_i^{-2}]\}$.

На основании (1)–(3) устанавливается

Теорема 1. *При условии (3) в области G_0 существует единственное решение λ_n^0 уравнения (1), для которого $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \lambda_n^0(\omega) = c_1^{-2}$, где c_1 — фазовая скорость волны Рэлея в полупространстве с параметрами первого слоя. При этом имеет место следующее аддитивно-асимптотическое представление $\lambda_n^{(0)}$*

$$\lambda_n^{(0)}(\omega, \mathbf{p}^{(n)}) = \lambda_j^{(0)}(\omega, \mathbf{p}^{(j)}) - \sum_{s=j+1}^n \mu_s(\omega, \mathbf{p}^{(s)}) e^{-\omega \hat{w}_s}, \quad (4)$$

где j целое, $0 \leq j \leq n-1$; $\hat{w}_s \equiv w_s(\lambda = c_1^{-2})$,

$$\mu_s(\omega, \mathbf{p}^{(s)}) \equiv \hat{\mu}_s(\mathbf{p}^{(s)}) + \omega^{\varepsilon_s} e^{-\omega \hat{\sigma}_s} \hat{\Phi}_s(\omega, \mathbf{p}^{(s)}), \quad (5)$$

$$\hat{\mu}_s \equiv f_s(\mathbf{p}^{(s-1)}) R(\mathbf{p}^{(s)}), \quad \hat{\sigma}_s = \min_{1 \leq i \leq s} \{(\hat{k}_s - \hat{\kappa}_s) h_s, 2\hat{\kappa}_s h_s\} > 0,$$

$$\varepsilon_s = 1 + \text{sign}(\hat{\sigma}_s - 2\hat{\kappa}_1 h_1), \quad \hat{\kappa}_s = \sqrt{c_1^{-2} - b_s^{-2}}, \quad \hat{k}_s = \sqrt{c_1^{-2} - a_s^{-2}}, \quad \hat{k}_s > \hat{\kappa}_s;$$

$\hat{\Phi}_s(\omega, \mathbf{p}^{(s)})$ ограничена при $\omega \rightarrow \infty$; $R(\mathbf{p}^{(s)})$ не зависит от h_s и является дробно-иррациональной функцией параметров a_{s+1} , b_{s+1} , v_s .

Теорема 2. При следующих условиях типа монотонности:

$$a_i \leq a_{i+1}, \quad b_i \leq b_{i+1}, \quad \mu_i \leq \mu_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad b_1 \leq c_2, \quad (6)$$

где c_2 — фазовая скорость волны Рэлея в полупространстве с параметрами второго слоя, в области G^* существует четное множество $\lambda_n^{(k)}(\omega)$, $k = 1, 2, \dots$, решений, для которых $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \lambda_n^{(k)}(\omega) = b_1^{-2}$. При этом справедливы следующие аддитивно-асимптотические представления:

$$\lambda_n^{(k)}(\omega, \mathbf{p}^{(n)}) = \lambda_j^{(k)}(\omega, \mathbf{p}^{(j)}) + \frac{1}{\omega^3} \sum_{s=j+1}^n \psi_s^{(k)}(\omega, \mathbf{p}^{(s)}) e^{-\omega \hat{w}_s}, \quad (7)$$

где j целое; $1 \leq j \leq n-1$,

$$\psi_s^{(k)}(\omega, \mathbf{p}^{(s)}) = \sum_{m=0}^2 \frac{b_{m,s}^{(k)}}{\omega^m} + \frac{1}{\omega^3} \Psi_s^{(k)}(\omega, \mathbf{p}^{(s)}), \quad (8)$$

$$b_{0,s}^{(k)} = \gamma_{0,s}(\mathbf{p}^{(s-1)}) R(\mathbf{p}^{(s)}), \quad b_{1,s}^{(k)} = \gamma_{1,s}^{(k)}(\mathbf{p}^{(s-1)}) R(\mathbf{p}^{(s)}), \quad b_{2,s}^{(k)} = -\gamma_{0,s} \alpha_k^2 R'(\mathbf{p}^{(s)}) + \\ + \gamma_{2,s}^{(k)}(\mathbf{p}^{(s-1)}) R(\mathbf{p}^{(s)}), \quad \gamma_{0,s} \neq 0, \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{h_1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$R' \equiv \left[\frac{d}{d\lambda} R(\lambda) \right]_{\lambda=b_1^{-2}};$$

$\Psi_s^{(k)}(\omega, \mathbf{p}^{(s)})$ ограничены при $\omega \rightarrow \infty$.

В свою очередь,

$$\lambda_1^{(k)}(\omega, \mathbf{p}^{(1)}) = b_1^{-2} - \frac{\alpha_k^2}{\omega^2} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^4 \frac{a_m^{(k)}}{\omega^m} + \frac{1}{\omega^5} \varphi_1^{(k)}(\omega, \mathbf{p}^{(1)}) \right\}, \quad (9)$$

где $a_1^{(k)} \equiv Q(\mathbf{p}^{(1)})$, $a_2^{(k)} = Q^2$, $a_3^{(k)} = Q^3(1 - 1/3 k^2 \pi^2)$, $a_4^{(k)} = -\alpha_k^2(Q + 3)Q' + Q^4(1 - 4/3 k^2 \pi^2)$; $Q > 0$ — дробно-иррациональная функция параметров $Q' \equiv \left[\frac{d}{d\lambda} Q \right]_{\lambda=b_1^{-2}}$, $\varphi_1^{(k)}(\omega, \mathbf{p}^{(1)})$ ограничены при $\omega \rightarrow \infty$.

Из приведенных результатов видно, в частности, что влияние различных элементов $\mathbf{q}^{(i)}$ слоистой структуры на дисперсионный спектр различается по экспоненциальным порядкам убывания при $\omega \rightarrow \infty$. С другой стороны, гармоники спектра оказываются более «чувствительными» к деталям структуры по сравнению с основным тоном, и притом «одинаково чувствительными» независимо от k , $k \geq 1$. Заметно также подобие аддитивно-асимптотических представлений гармоник Рэлея и соответствующих представлений дисперсионного спектра волн Лява (7). В частности, главные порядки асимптотических представлений указанных спектров имеют вид $\lambda_n^{(k)} = b_1^{-2} - \gamma_k \frac{\pi^2}{k^2 \omega^2} + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right)$, где $\gamma_k = (k + 1/2)^2$,

$k = 0, 1, 2, \dots$, для волн Лява (8) и $\gamma_k = k^2$, $k = 1, 2, \dots$, для гармоник волн Рэлея. Близость соответствующих элементов спектров поверхностных волн отмечалась также в работе (11), связанной с математическим моделированием задачи.

3. Обратимся к вопросу о единственности решения обратной задачи. Доказательство формулируемых ниже утверждений основано на (4), (7) и на том отдельно установленном факте, что при соответствующих условиях величины $\hat{w}_s$ и выделенные коэффициенты разложений Q , Q' , R , R' последовательно и однозначно определяют элементы $\mathbf{q}^{(s)}$. Если это так, то легко доказывается, как и в (1, 7-9), что двум структурам, различающимся теми или иными параметрами, необходимо отвечают различные дисперсионные кривые (основного тона или обертонов).

Здесь мы ограничиваемся классом структур, удовлетворяющих условиям типа монотонности (6) и соотношению Пуассона

$$a_i = \sqrt[3]{3} b_i, \quad b_i \leq b_{i+1}, \quad \mu_i \leq \mu_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad b_1 < c_2. \quad (10)$$

Теорема 3. Если структура принадлежит классу (10), причем по каким-либо другим данным известны значения a_i , $i = 1, 2, \dots, n$, то соответствующая ей дисперсионная кривая основного тона волны Рэлея однозначно определяет толщины всех слоев и отношения плотностей ρ_i/ρ_{i+1} .

Отсюда, в частности, следует, что имеет место единственность в задаче об определении толщин слоев по основному тону волны Рэлея; при известном значении ρ_1 однозначно определяется плотностной разрез.

Теорема 4. При условиях (10) дисперсионная кривая любого обертона волны Рэлея ($k = 1, 2, \dots$) однозначно определяет совокупность существенных параметров $\mathbf{p}^{(n)} = \{n, a_i, b_i (i = 1, 2, \dots, n+1), v_i, h_i (i = 1, 2, \dots, n)\}$.

В частности, в указанном классе имеет место единственность решения задачи интерпретации первого обертона волны Рэлея.

Более детальный анализ высокочастотной асимптотики основного тона (9) и рассмотрение длинно-периодной асимптотики позволяет установить для классических структур следующий факт.

Теорема 5. Если $0 \leq n \leq 2$, $a_i = \sqrt[3]{3} b_i$, $b_i \leq b_{i+1}$, $\mu_i \leq \mu_{i+1}$, $h_{i-1} \leq h_i$, $i = 1, 2$, $h_0 = 0$, то дисперсионная кривая основного тона волны Рэлея однозначно определяет существенные параметры структуры $\mathbf{P}^{(n)}$.

Заметим, что класс структур, оговариваемых в условиях теорем 3–5, заведомо не пуст; он включает модели коры континентального типа (12), применяемые при практической интерпретации.

Поскольку, с другой стороны, сформулированные ограничения носят характер достаточных условий, установлено, что по крайней мере в классе моделей реальных структур, удовлетворяющих некоторым условиям монотонности, имеет место единственность задачи интерпретации дисперсионного спектра волн Рэлея в различных ее аспектах.

Для задачи совместной интерпретации дисперсионных кривых поверхностных волн Рэлея и Лява имеет место следующая

Теорема 6. В классе структур, удовлетворяющих условиям $a_i = \min_{1 \leq i \leq n+1} a_i$, $b_i = \min_{1 \leq i \leq n+1} b_i$, наряду дисперсионных кривых основного тона волн Рэлея и Лява отвечает единственная совокупность существенных параметров структуры

$$\mathbf{q}^{(n)} = \{n; a_i, b_i (i = 1, 2, \dots, n+1); v_j, h_j (j = 1, 2, \dots, n)\}.$$

Условия теоремы не исключают существования слоев пониженной скорости, и им отвечают все модели реальных структур. Таким образом, снимаются ограничения монотонности, наложенные на класс структур в (8).

Считаю приятным долгом выразить в заключение признательность акад. А. Н. Тихонову, а также Е. Ф. Саваренскому за ценные обсуждения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
31 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Н. Тихонов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 5, № 3, 545 (1965).
² А. Н. Тихонов, ДАН, 153, № 1, 48 (1963). ³ В. И. Дмитриев, Изв. АН СССР, Физика Земли, № 1, 64 (1970). ⁴ А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, Н. И. Кулик, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 12, № 1 (1972). ⁵ Е. Ф. Саваренский, Д. П. Кирнос, Элементы сейсмологии и сейсмометрии, М.—Л., 1949. ⁶ К. Е. Буллен, Введение в теоретическую сейсмологию, М., 1966. ⁷ В. Б. Гласко, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 10, № 6, 1465 (1970). ⁸ В. Б. Гласко, ДАН, 197, № 5, 1062 (1971). ⁹ В. Б. Гласко, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 11, № 6, 1499 (1971). ¹⁰ М. Л. Гервер, Д. А. Каждан, Вычислительная сейсмология, в. 4, «Наука», 1968, стр. 78. ¹¹ А. Л. Левшин, В. И. Французова, Г. В. Шкадина, Вычислит. сейсмология, в. 2, «Наука», 1968, стр. 183. ¹² Г. Джеффрис, Земля, ее происхождение, история и строение, ИЛ, 1960.