Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 3

УДК 513.83 **МАТЕМАТИКА**

Б. ШАПИРОВСКИЙ

О ПЛОТНОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 27 I 1972)

Пусть X — топологическое пространство, $Y \subset X$ и τ — кардинал. Положим $[Y]_\tau = \cup \{[A]: A \subset Y, |A| \leqslant \tau\}$, $\Omega_\tau = \min \{\alpha: \alpha$ — ординал и $|\alpha| = \tau\}$. (Неразъясненные обозначения и определения см. ([1-3], [7]).)

Всякое вполне упорядоченное по возрастанию семейство замкнутых в X множеств $\xi = \{F_\alpha: \alpha < \Omega_{|\xi|}\}$ будем называть возрастающим в X, если $F_\alpha \neq X$ для всех $F_\alpha \in \xi$. Если ξ — возрастающее в X семейство и, кроме того, $\bigcup \{F_\alpha: F_\alpha \in \xi\} = X$ и $|\xi|$ — регулярный кардинал, то будем говорить, что ξ — особое в X семейство. Тогда $ш(X) = \sup \{|\xi|: \xi$ — особое в X семейство$\}$ — число Шанина пространства X.

Пусть $\tau(Y)$ — произвольная кардинальнозначная функция, определенная на всех $Y \subset X$. Положим

$$\bar{\tau}(X) = \sup \{\tau(Y): Y \subset X\},$$

$$\tau'(X) = \sup \{\tau(F): F \text{ замкнуто в } X\},$$

$$\tau''(X) = \sup \{\tau(F): F \text{ замкнуто и нигде не плотно в } X\},$$

и пусть $\tau_1(Y) = s(Y)$, $\tau_2(Y) = ш(Y)$ и $\tau_3(Y) = c(Y)$, где $s(Y)$ — плотность пространства Y, а $c(Y) = \sup \{|D|: D$ — дизъюнктное семейство открытых в Y множеств$\}$ — число Суслина пространства Y. Таким образом, определены $\bar{\tau}_i(X), \tau_i'(X), \tau_i''(X)$, $i = 1, 2, 3$ *.

Замечание 1. Нетрудно доказывается хорошо известное неравенство $c(X) \leqslant ш(X) \leqslant s(X)$. Кроме того, если $Y \subset X$, то ясно, что $c([Y]) = c(Y)$. Следовательно, $\bar{c}(X) = c'(X) \leqslant ш'(X) \leqslant s'(X)$.

Далее понадобятся следующие результаты, полученные автором.

P1. $\bar{s}(X) = s'(X)t(X) = ш'(X)t(X)$ **.

P2. *Если X — хаусдорфово k-пространство, то $t(X) \leqslant \bar{c}(X)$* ***.

P3. *Если X — хаусдорфово пространство, то существует $Y \subset X$ такое, что $|Y| \leqslant 2^{\bar{c}(X)}$ и $[Y]_{\bar{c}(X)} = X$.*

P4. *Если X — регулярное пространство точечно-счетного типа, то $w(X) \leqslant 2^{c(X)t(X)}$* ****.

Из замечания 1, P1 и P2 немедленно следует

Предложение 1. *Если X — хаусдорфово k-пространство, то $\bar{s}(X) = s'(X) = ш'(X)$.*

Следствие 1. *Если X — хаусдорфово пространство точечно-счетного типа, удовлетворяющее условию Шанина наследственно по замкнутым множествам, то X — наследственно сепарабельно. В частности, бикомпакт, сепарабельный наследственно по замкнутым множествам, будет наследственно сепарабельным пространством* (см. также ([3])).

---

* Говорят, что пространство X удовлетворяет условию Шанина (Суслина), если $ш(X) \leqslant \aleph_0$ ($c(X) \leqslant \aleph_0$). Пространство X наследственно суслинское, если $\bar{c}(X) \leqslant \aleph_0$. Исследование инвариантов $\bar{ш}(X)$ и $ш'(X)$ в сравнении их с $\bar{s}(X)$ и $s'(X)$ было, по существу, начато в работе ([1]), в которой доказано, что $\bar{ш}(X) = \bar{s}(X)$, а также, что $\bar{s}'(X) \leqslant ш'(X)t(X)$.

** $t(X) = \min \{\tau: [M]_\tau = [M]$ для всех $M \subset X\}$ — теснота пространства X ([1]).

*** Этот результат независимо доказан А. В. Архангельским ([3]).

**** Для того чтобы $s(X) \leqslant 2^{c(X)t(X)}$, достаточно хаусдорфовости пространства X точечно-счетного типа (см. ([2]) и доказательство теоремы 5 из ([7])).

Лемма 1. *Пусть* $[Y]_\tau = X$ *и* $|Y| = s(X)$.

Тогда $\mathrm{cf}(s(X)) \leqslant \tau \cdot ш(X)$ *.

Доказательство. Пусть $Y = \{y_\alpha\colon \alpha < \Omega_{|Y|}\}$, $F_\alpha = [\{y_\beta\colon \beta < \alpha\}]$ и $\xi = \{F_\alpha\colon \alpha < \Omega_{|Y|}\}$. Если $\mathrm{cf}(|Y|) > \tau$, то для всякой точки $x \in X$ найдется $F_\alpha \in \xi$ такое, что $x \in F_\alpha$. Следовательно, $X = \bigcup \{F_\alpha\colon F_\alpha \in \xi\}$ и, кроме того, для всех $F_\alpha \in \xi$ $F_\alpha \neq X$, иначе $s(X) < |Y|$. Поэтому существует особое в X семейство $\zeta \subset \xi$, для которого $|\zeta| = \mathrm{cf}(|Y|)$. Значит

$$\mathrm{cf}(|Y|) = \mathrm{cf}(s(X)) = |\zeta| \leqslant ш(X) \leqslant ш(X)\tau.$$

Следствие. *Если* $|X| = s(X)$, *то* $\mathrm{cf}(|X|) \leqslant ш(X)$; *если* X *удовлетворяет условию Шанина и* $\mathrm{cf}(|X|) > \aleph_0$, *то* $s(X) < |X|$.

Так как для всякого $Y \subset X$ $[Y]_{t(X)} = X$, то из леммы 1 вытекает

Утверждение 1. $\mathrm{cf}(s(X)) \leqslant t(X) ш(X)$.

Заметив, что для любых кардиналов τ, ν $\mathrm{cf}(\tau^\nu) > \nu$, получаем

Утверждение 1′. $s(X) < s(X)^{t(X)ш(X)}$; $s(X) < |X|^{ш(X)}$.

Из замечания 1, утверждения 1′ и P4 следует

Предложение 2. *Пусть* X — *хаусдорфово пространство точечно-счетного типа.*

Тогда $s(X) < 2^{t(X)ш(X)}$ *и при* GCH $s(X) \leqslant t(X) ш(X)$.

Следствие 2 (GCH). *Если* X — *бикомпакт с условием Шанина, то* $s(X) \leqslant t(X)$; *если* X — *хаусдорфово пространство с первой аксиомой счетности, то* $s(X) = ш(X)$ ([5]).

Предложение 3. *Пусть* X — *хаусдорфово секвенциальное пространство точечно-счетного типа.*

Тогда в предположении регулярности $2^{ш(X)}$ $\pi w(X) < 2^{ш(X)}$ ** *и при* GCH $\pi w(X) \leqslant ш(X)$.

Доказательство. Положим $X' = \{x\colon x \in X,\ \chi(x, X) < 2^{ш(X)}\}$. Из работы ([2]) следует, что $[X'] = X$. В силу предложения 2 существует $Y \subset X$ такое, что $|Y| < 2^{t(X)ш(X)}$ и $[Y] = X$. Для всякой точки $y \in Y$ выберем $T_y \subset X'$ такое, что $|T_y| \leqslant t(X)$ и $y \in [T_y]$. Положим $T = \bigcup \{T_y\colon y \in Y\}$, и пусть для всех $x \in X'$, B_x — база x в X такая, что $|B_x| < 2^{ш(X)}$. Ясно, что $[T] = X$, и, значит, $B = \bigcup \{B_x\colon x \in T\}$ — π-база в X. Но $t(X) \leqslant \aleph_0$, $|T| < 2^{ш(X)}$, и в силу регулярности $2^{ш(X)}$ получаем $|B| < 2^{ш(X)}$.

Следствие 3 (CH). *Секвенциальный бикомпакт с условием Шанина имеет счетную* π-*базу.*

Предложение 4. *Пусть* X — *хаусдорфово пространство.*

Тогда $s(X) < 2^{\bar{c}(X)ш(X)}$ *и при* GCH $s(X) \leqslant \bar{c}(X) ш(X)$.

Доказательство. В силу P3 существует $Y \subset X$ такое, что $[Y]_{\bar{c}(X)} = X$ и $|Y| \leqslant 2^{\bar{c}(X)ш(X)}$. Предложение $s(X) = |Y| = 2^{\bar{c}(X)ш(X)}$ приводит к противоречию с леммой 1, так как $\mathrm{cf}(2^{\bar{c}(X)ш(X)}) > \bar{c}(X) ш(X)$. Значит, $s(X) < 2^{\bar{c}(X)ш(X)}$.

Следствие 4 (CH). *Наследственно суслинское хаусдорфово пространство с условием Шанина сепарабельно.*

Учитывая, что $\bar{c}(X) ш(X) \leqslant ш'(X)$, из предложения 4 получаем

Предложение 5. *Пусть* X — *хаусдорфово пространство.*

Тогда для всякого замкнутого $F \subset X$ $s(F) < 2^{ш'(X)}$ *и при* GCH $s'(X) = ш'(X)$.

Следствие 5 (CH). *Если хаусдорфово пространство* X *удовлетворяет условию Шанина наследственно по замкнутым множествам, то* X *сепарабельно наследственно по замкнутым множествам.*

Замечание 2. Из определений следует, что $\tau_i'(X) = \tau_i''(X) + \tau_i(X)$. Значит, $\bar{c}(X) = c'(X) = c''(X) + c(X)$.

---

* $\mathrm{cf}(\tau) = \min\{|M|\colon \tau = \sum \{\nu\colon \nu \in M\}$ и $\nu < \tau$ для всех $\nu \in M\}$. Отметим, что $\mathrm{cf}(\tau)$ — регулярный кардинал для всякого кардинала τ.

** $\pi w(X) = \min\{|B|\colon B$ — π-база в $X\}$ — π-вес пространства X ([4]).

Утверждение 2. *Пусть X не содержит изолированных точек. Тогда $\bar{c}(X) = c''(X)$.*

Доказательство. В силу замечания 2 достаточно показать, что $c(X) \leqslant c''(X)$. Действительно, пусть D — произвольное дизъюнктивное семейство открытых в X множеств. Для всякого $U \in D$, зафиксируем $x(U) \in U$ и положим $F = [\{x(U)\colon U \in D\}]$. $\tilde{D} = \{\{x(U)\}\colon U \in D\}$ — дизъюнктное семейство открытых в F множеств, а F замкнуто и нигде не плотно в X, так как для всех $U \in D$ $x(U)$ — неизолированная в X точка и D дизъюнктно. Следовательно, $|D| = |\tilde{D}| \leqslant c(F) \leqslant c''(X)$, что и доказывает утверждение.

Для дискретного пространства X $c''(X) = 0$, в то время как $c(X) = \bar{c}(X) = |X|$.

Утверждение 3. *Пусть $U_\nu = \cup \{U\colon U$ открыто в X, $\tau_i(U) \leqslant \nu\}$, $i = 1, 2, \tau_1(U) = s(U), \tau_2(U) = ш(U)$.*
Тогда $\tau_i(U_\nu) \leqslant \nu c(X)$, $i = 1, 2$.

Доказательство. Пусть $\xi_\nu = \{U\colon U$ открыто в X, $\tau_i(U) \leqslant \nu\}$. Легко показать, что существует D — дизъюнктное семейство такое, что $D \subset \xi_\nu$ и $U_\nu \subset [\tilde{U}]$, где $\tilde{U} = \cup\{U\colon U \in D\}$. Но, если $A \subset B \subset [A]$, то $\tau_i(B) \leqslant \tau_i(A)$. Поэтому $\tau_i(U_\nu) \leqslant \tau_i(\tilde{U})$, и $\tau_i(U_\nu) \leqslant |D|\nu \leqslant c(X)\nu$.

Утверждение 4. $\bar{s}(X) \leqslant (ш''(X)t(X)c(X))^+$.

Доказательство. Положим $\nu = (ш''(X)t(X)c(X))^+$, $U_\nu = \bigcup\{U\colon U$ открыто в X, $s(U) \leqslant \nu\}$. По утверждению 3, $s(U_\nu) \leqslant \nu c(X) \leqslant \nu(X)$. Покажем, что $X = U_\nu$. Действительно, если $X \setminus U_\nu = G \neq \Lambda$, то $s(G) > \nu$. Тогда существует строго возрастающее семейство $\zeta = \{F_\alpha\colon \alpha < \Omega_\nu\}$ замкнутых в G множеств такое, что для всех $F_\alpha \in \zeta$ $s(F_\alpha) < \nu$. Так как ν — регулярный кардинал и $t(X) < \nu$, то $\bigcup\{F_\alpha\colon F_\alpha \in \zeta\} = F$ — замкнуто в X и, значит, ζ — особое в F семейство. Поэтому $ш(F) \geqslant |\zeta| = \nu > ш''(X)$, и, следовательно, существует открытое в X множество $V \subset F$. Но тогда $s(V) \leqslant \nu$ и $V \subset U_\nu \subset X \setminus F$, что противоречиво. Итак, $U_\nu = X$ и $s(X) \leqslant \nu$. Если H замкнуто и нигде не плотно в X, то $ш'(H) \leqslant ш''(X)$ и, в силу P1, $\bar{s}(H) \leqslant ш''(H)t(H) \leqslant ш''(X)t(X)$. Следовательно, для всякого A, нигде не плотного в X, $s(A) \leqslant ш''(X)t(X) \leqslant \nu$, что и влечет требуемое неравенство.

Так как $c''(X) \leqslant ш''(X)$, то из утверждений 2, 4 и P2 вытекает

Предложение 6. *Пусть X — хаусдорфово k-пространство без изолированных точек. Тогда $\bar{s}(X) \leqslant ш''(X)^+$.*

Следствие 6. *Если бикомпакт X не содержит изолированных точек и всякое его нигде не плотное замкнутое подмножество удовлетворяет условию Шанина (например, сепарабельно), то тогда все нигде не плотные в X множества сепарабельны и $\bar{s}(X) \leqslant \aleph_1$.*

Замечание 3. Если f — непрерывное отображение X на Y, то $ш(Y) \leqslant ш(X)$; если $X = \Pi\{X_\alpha\colon \alpha \in M\}$, то $ш(X) \leqslant \sup\{ш(X_\alpha)\colon \alpha \in M\}$ ([6]). Эти хорошо известные факты позволяют выделить наиболее интересный класс пространств, удовлетворяющих условию Шанина.

Пусть S — класс сепарабельных пространств, S_1 — минимальный среди всех классов S' таких, что $S \subset S'$ и S' замкнут относительно операций произведения (в любом числе) и перехода к открытым подмножествам, а $\tilde{S}$ — класс всех непрерывных образов пространств класса S_1. Ясно, что $\tilde{S}$ — минимальный среди всех классов, содержащих S и замкнутых относительно операций произведения (в любом числе), перехода к открытым подмножествам и непрерывного отображения.

В силу замечания 3 справедливо

Утверждение 5. *Если $X \in \tilde{S}$, то $ш(X) \leqslant \aleph_0$.*

Теоремы 1—6 вытекают из утверждения 5 и предложений 1—6.

Теорема 1. *Пусть X — хаусдорфово k-пространство (в частности пространство точечно-счетного типа) и всякое замкнутое в X подмножество $F \in \tilde{S}$. Тогда X — наследственно сепарабельное пространство.*

Теорема 2. *Пусть X — регулярное пространство точечно-счетного типа (в частности, бикомпакт), и $X \in \tilde{S}$.*

Тогда $w(X) \leqslant 2^{t(X)}$, $s(X) < 2^{t(X)}$ *и при* GCH $s(X) \leqslant t(X)$.

Теорема 3. *Пусть X — хаусдорфово секвенциальное пространство точечно-счетного типа (в частности, бикомпакт) и $X \in \tilde{S}$. Тогда $\pi w(X) < 2^{\aleph_0}$ в предположении регулярности $2^{\aleph_0}$ и при* CH $\pi w(X) \leqslant \aleph_0$.

Теорема 4. *Пусть хаусдорфово пространство $X \in \tilde{S}$.*

Тогда $s(X) < 2^{\bar{c}(X)}$ *и при* GCH $s(X) \leqslant \bar{c}(X)$.

Теорема 5. *Пусть X — хаусдорфово пространство и всякое замкнутое в X множество $F \in \tilde{S}$.*

Тогда для всякого замкнутого $F \subset X$ $s(F) > 2^{\aleph_0}$ и при CH $s'(X) \leqslant \aleph_0$.

Теорема 6. *Пусть X — хаусдорфово k-пространство без изолированных точек, и всякое нигде не плотное в X замкнутое множество $F \in \tilde{S}$.*

Тогда $\bar{s}(X) \leqslant \aleph_1$, $\mathrm{t}(X) \leqslant \aleph_0$, *и для всякого A, нигде не плотного в X, $s(A) \leqslant \aleph_0$.*

Если X — линейно упорядоченное пространство, то $\chi(X) \leqslant c(X)$ и, кроме того, для всякого A, нигде не плотного в X, $s(A) \leqslant c(X)$ *. Следовательно, из утверждения 4 вытекает

Теорема 7. *Пусть X — линейно упорядоченное пространство.*

Тогда $s(X) \leqslant c(X)^+$ *и* $s''(X) \leqslant c(X)$ **.

Предложение 7. *Пусть X — линейно упорядоченное пространство. Тогда* $s(X) = ш(X)$.

Доказательство. В силу теоремы 7 $s(X) \leqslant c(X)^+ \leqslant ш(X)^+$. Следовательно, по утверждению 1, $s(X) = ш(X)$.

Следствие 7. *Линейно упорядоченное пространство с условием Шанина сепарабельно.*

Теорема 8. *Пусть линейно упорядоченное пространство $X \in \tilde{S}$.*

Тогда $s(X) \leqslant \aleph_0$.

Тенненбаум доказал ([9]), что существование континуума Суслина, т. е. связного линейно упорядоченного несепарабельного бикомпакта с условием Суслина, не противоречит системе аксиом ZF теории множеств. Таким образом, оценки, полученные в предложении 6 и теоремах 7, 6 не улучшаемы средствами наивной теории множеств.

Отметим одно свойство континуума Суслина K_C, вытекающее из теоремы 7: в K_C существует всюду плотное подмножество мощности $\aleph_1$, пересечение которого с любым нигде не плотным множеством счетно.

Автор выражает глубокую признательность А. В. Архангельскому за внимание и поддержку.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
4 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Архангельский, В. И. Пономарев, ДАН, **182**, № 5 (1968). [2] А. В. Архангельский, ДАН, **192**, № 2 (1970). [3] А. В. Архангельский, ДАН, **199**, № 6 (1971). [4] В. И. Пономарев, ДАН, **166**, № 2 (1966). [5] Б. А. Ефимов, ДАН, **178**, № 3 (1968). [6] Н. Шанин, Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 24 (1948). [7] Б. Шапировский, ДАН, **202**, № 4 (1972). [8] R. Engelking, Fund. Math., **59**, № 2 (1966). [9] S. Tennenbaum. Proc. Amer. Nat. Acad. Sci., **59**, № 1 (1968). [10] I. Suhasz, in collabration with A. Verbeek, N. Kroonenberg, Math. Centre Tracts, **34**, Amsterdam, 1971.

* Это неравенство можно получить, например, заметив следующее. Пусть X линейно упорядочено, тогда: 1) если A нигде не плотно в X, то существует $B \subset X$ такое, что $|B| \leqslant c(X)$ и $A \subset [B]$; 2) если $B \subset X$, то $s(B) = \bar{s}(B)$.

** Этот результат получен также в ([10]).