Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (117), 2019

УДК 512.542

О решетке локально нормальных классов Фиттинга

А.В. Марцинкевич

Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс конечных групп. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется нормальным в $\mathfrak{X}$ или локально нормальным, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ её $\mathfrak{F}$-радикал $\mathfrak{F}$-максимален в G. Пусть π – непустое множество простых чисел, $\mathfrak{S}_\pi$ – класс всех конечных разрешимых π-групп и $\mathfrak{S}$ – класс всех конечных разрешимых групп. Тогда, в случае $\mathfrak{X}=\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{X}=\mathfrak{S}$, $\mathfrak{X}$-нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют π-нормальным и нормальным соответственно. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ классы Фиттинга, то пересечение всех классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}$, называют решеточным объединением $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ классов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$. Множество всех π-нормальных классов Фиттинга, частично упорядоченное по включению, с операциями «$\vee$» и «$\wedge$» («$\wedge$» – операция пересечения) образует решетку. В настоящей работе доказано, что множество всех π-нормальных классов Фиттинга, каждый из которых порожден не π-нормальным классом Фиттинга π-групп, является подрешеткой решетки всех π-нормальных классов Фиттинга.
Ключевые слова: класс Фиттинга, локально нормальный класс Фиттинга, решетка классов Фиттинга.

Let $\mathfrak{X}$ be nonempty class of finite groups. A Fitting class $\mathfrak{F}$ is called normal in $\mathfrak{X}$ or locally normal if $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ and for every group $G \in \mathfrak{X}$ its $\mathfrak{F}$-radical is $\mathfrak{F}$-maximal subgroup of G. Let π be nonempty set of primes, $\mathfrak{S}_\pi$ is the class of all finite and soluble π-groups and $\mathfrak{S}$ is the class of all finite and soluble groups. If $\mathfrak{X}=\mathfrak{S}_\pi$ and $\mathfrak{X}=\mathfrak{S}$, then $\mathfrak{X}$-normal Fitting class $\mathfrak{F}$ is called π-normal and normal respectively. Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be Fitting classes. The lattice join $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ of Fitting classes $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ is the intersection of all those Fitting classes which contain $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}$. The set of all π-normal Fitting classes, partially ordered by inclusion, together with the operations «$\vee$» and «$\wedge$» («$\wedge$» – is an operation of intersection) forms a lattice. In this paper we prove that the set of all π-normal Fitting classes, each of them is generated by non π-normal Fitting class of π-groups, is the sublattice of the lattice of all π-normal Fitting classes.
Keywords: Fitting class, locally normal Fitting class, lattice of Fitting classes.

1. Введение. В настоящей работе все рассматриваемые группы конечны и разрешимы.
Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если выполнены следующие условия:
(1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$, то $N \in \mathfrak{F}$;
(2) если $N_1 \lhd G$ и $N_2 \lhd G$, $N_1 \in \mathfrak{F}$ и $N_2 \in \mathfrak{F}$, то $N_1 N_2 \in \mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то для любой группы G существует единственная максимальная нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа G. Её обозначают $G_\mathfrak{F}$ и называют $\mathfrak{F}$-радикалом G.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют нормальным в классе групп $\mathfrak{X}$ или *локально нормальным* [1, определение IX.2.3(b)], если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ её $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел и $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют нормальным в классе $\mathfrak{S}_\pi$ всех π-групп или просто π-нормальным (обозначают $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$) [2] (см. также [1, теорема X.3.7]), если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и для любой π-группы G её $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G. В случае, когда π совпадает с множеством всех простых чисел, π-нормальный класс Фиттинга называют нормальным [3].

Нормальные классы Фиттинга являются ключевыми объектами в исследованиях структуры классов Фиттинга и их характеризации (см., например, [1, X.3]). В теории нормальных классов Фиттинга известна теорема Блессеноля-Гашюца [3, теорема 6.2] о том, что пересечение любого множества неединичных нормальных классов Фиттинга является неединичным нормальным классом Фиттинга. Кроме того, Кусаком [4, теорема 4.1] установлено, что класс Фиттинга $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$, порожденный объединением неединичных нормальных классов Фиттинга

$\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, является неединичным и нормальным. Таким образом, множество всех нормальных классов Фиттинга, частично упорядоченное по включению, с операциями «$\vee$» и «$\wedge$» («$\wedge$» – операция пересечения) образует решетку.

Значительный интерес к изучению решеток классов Фиттинга обусловлен следующими обстоятельствами. Во-первых, как установлено Лаушем [5, следствие 2.5] (см. также [1, теорема X.4.14]), решетка всех разрешимых нормальных классов Фиттинга изоморфна решетке подгрупп некоторой абелевой группы (в общем случае бесконечной) и, следовательно, является модулярной. Во-вторых, до настоящего времени остаётся открытым вопрос С.Ф. Каморникова и А.Н. Скибы [6, проблема 14.47] о том, обладает ли решетка всех разрешимых классов Фиттинга свойством модулярности.

В работе [2] нами получено развитие и обобщение результата Лауша: доказано, что решетка всех π-нормальных классов Фиттинга (в общем случае неразрешимых) модулярна (см. [2, теорема 4.3]).

Наряду с изучением свойств решеток нормальных классов Фиттинга актуальна общая задача описания подрешеточного строения решеток этих классов. Решение такой задачи неизбежно приводит к разработке методов построения подрешеток нормальных классов Фиттинга.

В настоящей работе мы описываем построение подрешетки решетки всех π-нормальных классов Фиттинга (в частности, подрешетки всех нормальных классов Фиттинга). Основной результат работы представляет следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть π – некоторое бесконечное множество простых чисел. Множество всех π-нормальных классов Фиттинга, каждый из которых порожден не π-нормальным классом Фиттинга π-групп, является подрешеткой решетки всех π-нормальных классов Фиттинга.*

Следствие 1.2. *Множество всех нормальных классов Фиттинга, каждый из которых порожден ненормальным классом Фиттинга, является подрешеткой решетки всех нормальных классов Фиттинга.*

Обозначения и терминология являются стандартными. В случае необходимости её можно найти [1], [7].

2. Предварительные сведения. Символами π, p будем обозначать некоторое множество простых чисел, простое число и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ соответственно. Через Z_p будем обозначать циклическую группу порядка p.

Напомним следующие общепринятые обозначения классов групп:

– $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп;

– $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп;

– $\mathfrak{N}_\pi$ – класс всех нильпотентных π-групп;

– $\mathfrak{S}_{\pi'}$ – класс всех разрешимых π'-групп, в частности, если обозначить $\{p\}'$ символом p', то класс всех p'-групп будем обозначать $\mathfrak{S}_{p'}$.

Подгруппа H называется *нормально вложенной* в группу G, если H изоморфна некоторой нормальной подгруппе группы G.

В работе [8] определены *операторы Локетта* «*» и «$_*$». Каждому непустому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ соответствует класс $\mathfrak{F}^* = G:(G\times G)_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{F}} \times G_{\mathfrak{F}})\langle (g^{-1}, g) : g \in G\rangle$. Класс $\mathfrak{F}_* = \cap\{\mathfrak{X} : \mathfrak{X}$ - класс Фиттинга, $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*\}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *классом Локетта*, если $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$.

Лемма 2.1. *Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – непустые классы Фиттинга, то справедливы следующие утверждения:*

(a) [1, теорема X.1.8(b)] *если* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, *то* $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{H}^*$;

(b) [1, теоремы X.1.15 и X.1.8(a)] $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}_*)^* = (\mathfrak{F}^*)^*$;

(c) [1, предложение X.1.13] $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})^* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}^*$;

(d) [4, теорема 2.8] $(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H})_* = \mathfrak{F}_* \vee \mathfrak{H}_*$.

Произведением $\mathfrak{FH}$ *классов Фиттинга* $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс $\mathfrak{FH} = (G : G / G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно, что класс $\mathfrak{FH}$ является классом Фиттинга и операция умножения ассоциативна [1, теорема IX.1.12(a), (c)].

Решеточным объединением $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ двух классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется пересечение всех таких классов Фиттинга, которые содержат их объединение.

Отображение C классов групп в классы групп называется *операцией замыкания*, если классы групп $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ удовлетворяют следующим трём условиям:

(a) $\mathfrak{F} \subseteq C\mathfrak{F}$;

(b) $C\mathfrak{F} = C\ C\mathfrak{F}$;

(c) если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $C\mathfrak{F} \subseteq C\mathfrak{H}$.

Если $\mathfrak{F} = C\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$ – C-*замкнутый* класс групп.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп и S_n – операция замыкания, тогда $S_n\mathfrak{F} = (G : G \trianglelefteq\trianglelefteq H$ для некоторой группы $H \in \mathfrak{F})$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называют *гомоморфом*, если каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – гомоморф и $G / \Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$ – *насыщенный гомоморф*.

Через $\mathrm{Fit}\mathfrak{S}$ (мы обозначаем $\mathrm{Fit}\{\mathfrak{S}\}$ как $\mathrm{Fit}\mathfrak{S}$) будем обозначать наименьший класс Фиттинга, который содержит заданное множество групп $\mathfrak{S}$. Тогда решеточное объединение классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ можно определить следующим образом: $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} = \mathrm{Fit}(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – не π-нормальный класс Фиттинга π-групп. Через $N^{\pi}(\mathfrak{F})$ будем обозначать наименьший π-нормальный класс Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$. При $\pi = \mathbb{P}$ мы получаем, что $N(\mathfrak{F})$ – это наименьший нормальный класс Фиттинга, содержащий ненормальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Очевидно, что Fit и N^{π} – операции замыкания.

Через $G \wr H$ будем обозначать регулярное сплетение групп G и H, $G^{и}$ – базисную группу $G \wr H$.

Для характеризации π-нормальных классов Фиттинга будем использовать следующую лемму.

Лемма 2.2 [1, теорема X.3.7]. *Пусть* π *– некоторое непустое множество простых чисел. Если* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга* π*-групп, то следующие утверждения эквивалентны:*

(a) $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{S}_{\pi}$*;*

(b) *для каждого* $p \in \pi$ *и* $G \in \mathfrak{F}$ *существует натуральное число* n *такое, что* $G^n \wr Z_p \in \mathfrak{F}$*;*

(c) $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_{\pi}$.

Лемма 2.3 [1, теорема X.1.9(a), (b)]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга. Если* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$*, то* $(G \times G)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \times G_{\mathfrak{F}}$ *для любой группы* G.

Лемма 2.4 [1, предложение X.2.1(a)]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– класс Локетта и* G *– группа. Если* $G \notin \mathfrak{F}$*, то* $(G \wr H)_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{F}})^{и}$ *для всех групп* H.

Мы используем следующую модификацию теоремы Хаука [1, теорема IX.2.1].

Лемма 2.5 (см. [1, теорема IX.2.1]). *Пусть* $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Y}$ *– классы Фиттинга* π*-групп, множество* $\sigma = \{p \in \pi :$ *для некоторых* $G \in \mathfrak{X}, p \mid |G / G_{\mathfrak{Y}}|\}$ *и множество* $\tau = \{p \in \pi :$ *для некоторых* $G \in \mathfrak{Y}, p \mid |G / G_{\mathfrak{X}}|\}$*. Пусть* $\sigma \cap \tau \subseteq \omega \subseteq \pi$ *и класс* $N_{\omega}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = (G \in \mathfrak{S}_{\pi} : G / (G_{\mathfrak{X}} G_{\mathfrak{Y}}) \in \mathfrak{N}_{\omega})$*. Тогда* $N_{\omega}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ *– класс Фиттинга, содержащий* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Y}$.

Лемма 2.6 [2, лемма 4.1]. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Y}$ *– классы Фиттинга. Если* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}^*$*, то* $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} = S_n(G : G = G_{\mathfrak{X}} G_{\mathfrak{Y}})$.

Лемма 2.7 [4, теорема 2.9]. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Y}$ *– классы Фиттинга и* $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} = S_n(G : G = G_{\mathfrak{X}} G_{\mathfrak{Y}})$*. Если* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга такой, что* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$*, то* $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}) \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee (\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{F})$.

3. Доказательство теоремы 1.1. Предварительно докажем леммы, которые мы будем использовать для доказательства теоремы 1.1.

Лемма 3.1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– классы Фиттинга. Для любого натурального числа* n *мы определим следующее множество групп* S_n*:* $\mathrm{S}_0 = \{\mathfrak{F}, \mathfrak{H}\}$, $\mathrm{S}_n = \{H : H$ *нормально вложена в* $R = MN$*, где* $M \trianglelefteq R$, $N \trianglelefteq R$, $M \in \mathrm{S}_{n-1}$, $N \in \mathrm{S}_{n-1}\}$. *Тогда справедливо следующее утверждение* $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} = \cup\{\mathrm{S}_n : n = 1, 2, \ldots\}$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{S} = \cup\{\mathrm{S}_n : n = 1, 2, \ldots\}$. По определению класса Фиттинга получаем $\mathrm{S} \subseteq \mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{S}_0 \subseteq \mathrm{S}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathrm{S}_0 \subseteq \mathrm{S}$, то остаётся показать, что S – класс Фиттинга.

Пусть $H \trianglelefteq G$ и $G \in \mathrm{S}$. Тогда существует натуральное число n такое, что $G \in \mathrm{S}_n$. Из определения множества S_n получаем $H \in \mathrm{S}_{n+1}$. Предположим, что существуют подгруппы $M \in \mathrm{S}$ и $N \in \mathrm{S}$ такие, что $M \trianglelefteq G$, $N \trianglelefteq G$ и $G = MN$. Тогда найдутся натуральные числа i и j такие, что $M \in \mathrm{S}_i$ и $N \in \mathrm{S}_j$. Пусть $m = \max\{i, j\}$. Очевидно, что $M \in \mathrm{S}_m$ и $N \in \mathrm{S}_m$. Следовательно, $G \in \mathrm{S}_{m+1}$. Так как $\mathrm{S}_{m+1} \subseteq \mathrm{S}$, то S является классом Фиттинга. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Z}$ – классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:

(a) $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} = \mathfrak{Y} \vee \mathfrak{X}$*;*

(b) $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} = \mathrm{Fit}\{G_{\mathfrak{X}} G_{\mathfrak{Y}} : G - \textit{группа}\}$*;*

(c) $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}) \vee \mathfrak{Z} = \mathfrak{X} \vee (\mathfrak{Y} \vee \mathfrak{Z})$*;*

(d) *если* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}^*$, *то* $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})^* = \mathfrak{X}^* \vee \mathfrak{Y}^*$.

Доказательство. (a) Доказательство данного утверждения следует из определения решеточного объединения классов Фиттинга.

(b) Пусть множество групп $\mathrm{S} = \mathrm{Fit}\{G_{\mathfrak{X}} G_{\mathfrak{Y}} : G - \text{группа}\}$. Очевидно, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{S}$ и $\mathfrak{Y} \subseteq \mathrm{S}$. Значит, $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} \subseteq \mathrm{Fit}\mathrm{S}$.

По лемме 3.1 получаем $\mathrm{S} \subseteq \cup\{\mathrm{S}_n : n = 1, 2, \ldots\} = \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$. Таким образом, $\mathrm{Fit}\mathrm{S} \subseteq \mathrm{Fit}(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}) = \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$ и $\mathrm{Fit}\mathrm{S} = \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$.

(c) Утверждение (c) верно ввиду утверждения (b).

(d) Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$, то по утверждению (a) леммы 2.1 $\mathfrak{X}^* \subseteq (\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})^*$ и $\mathfrak{Y}^* \subseteq (\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})^*$. Значит, $\mathfrak{X}^* \vee \mathfrak{Y}^* \subseteq (\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})^*$.

По условию теоремы $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}^*$. Следовательно, $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}^*$. По утверждениям (a) и (b) леммы 2.1 имеем $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})^* \subseteq \mathfrak{Y}^* \subseteq \mathfrak{X}^* \vee \mathfrak{Y}^*$. Таким образом, $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})^* \subseteq \mathfrak{X}^* \vee \mathfrak{Y}^*$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Если* $\mathfrak{F}$ *– не* π*-нормальный класс Фиттинга* π*-групп, то* $\mathrm{N}^{\pi}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F} \vee (\mathfrak{S}_{\pi})_*$*, где* $(\mathfrak{S}_{\pi})_*$ *– наименьший* π*-нормальный класс Фиттинга.*

Доказательство. По определению класса групп $\mathrm{N}^{\pi}(\mathfrak{F})$ получаем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{N}^{\pi}(\mathfrak{F})$. Ввиду [9, следствие 2] $(\mathfrak{S}_{\pi})_* \subseteq \mathrm{N}^{\pi}(\mathfrak{F})$. Значит, $\mathfrak{F} \cup (\mathfrak{S}_{\pi})_* \subseteq \mathrm{N}^{\pi}(\mathfrak{F})$, и по определению операции замыкания $\mathrm{Fit}(\mathfrak{F} \cup (\mathfrak{S}_{\pi})_*) \subseteq \mathrm{Fit}(\mathrm{N}^{\pi}(\mathfrak{F}))$. Таким образом, $\mathfrak{F} \vee (\mathfrak{S}_{\pi})_* \subseteq \mathrm{N}^{\pi}(\mathfrak{F})$.

По утверждению (b) леммы 2.1 $\mathfrak{F} \subseteq ((\mathfrak{S}_{\pi})_*)^* = \mathfrak{S}_{\pi}$. Отсюда по утверждению (d) леммы 3.2 $(\mathfrak{F} \vee (\mathfrak{S}_{\pi})_*)^* = \mathfrak{F}^* \vee ((\mathfrak{S}_{\pi})_*)^* = \mathfrak{S}_{\pi}$. Ввиду леммы 2.2 ((c) $\Leftrightarrow$ (a)) $\mathfrak{F} \vee (\mathfrak{S}_{\pi})_*$ является π-нормальным классом Фиттинга, содержащим $\mathfrak{F}$. Из определения класса $\mathrm{N}^{\pi}(\mathfrak{F})$ следует, что $\mathrm{N}^{\pi}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F} \vee (\mathfrak{S}_{\pi})_*$. Таким образом, $\mathrm{N}^{\pi}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F} \vee (\mathfrak{S}_{\pi})_*$. Лемма доказана.

Мы используем следующую модификацию теоремы из [4].

Лемма 3.4 [4, теорема 2.1]. *Пусть* $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathrm{P}$, $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Y}$ *– классы Фиттинга* π*-групп. Если* $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} = (G \in \mathfrak{S}_{\pi} : G = G_{\mathfrak{X}} G_{\mathfrak{Y}})$*, то для некоторого множества простых чисел* $\sigma \subseteq \pi$ *справедливо, что* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}\mathfrak{S}_{\sigma}$ *и* $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\sigma'}$.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Фиттинга π-групп такие, что $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{S}_\pi$. Докажем, что $\mathrm{N}^\pi(\mathfrak{X}) \vee \mathrm{N}^\pi(\mathfrak{Y}) = \mathrm{N}^\pi(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})$.

Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$, то по определению операции замыкания N^π получаем $\mathrm{N}^\pi(\mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{N}^\pi(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})$ и $\mathrm{N}^\pi(\mathfrak{Y}) \subseteq \mathrm{N}^\pi(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})$. Значит, $\mathrm{Fit}(\mathrm{N}^\pi(\mathfrak{X}) \cup \mathrm{N}^\pi(\mathfrak{Y})) \subseteq \mathrm{Fit}(\mathrm{N}^\pi(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})) = \mathrm{N}^\pi(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})$. Следовательно, $\mathrm{N}^\pi(\mathfrak{X}) \vee \mathrm{N}^\pi(\mathfrak{Y}) \subseteq \mathrm{N}^\pi(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})$.

Так как операция решеточного объединения ассоциативна (см. утверждение (c) леммы 3.2) и по лемме 3.3 получаем, что $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}) \vee (\mathfrak{S}_\pi)_* = \mathfrak{X} \vee (\mathfrak{Y} \vee (\mathfrak{S}_\pi)_*) = \mathfrak{X} \vee \mathrm{N}^\pi(\mathfrak{Y})$.

По утверждению (b) леммы 2.1 $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} \subseteq ((\mathfrak{S}_\pi)_*)^* = \mathfrak{S}_\pi$. Таким образом, по утверждению (d) леммы 3.2 $((\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}) \vee (\mathfrak{S}_\pi)_*)^* = (\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})^* \vee \mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, по лемме 2.2 ((c) $\Leftrightarrow$ (a)) $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}) \vee (\mathfrak{S}_\pi)_*$ – π-нормальный класс Фиттинга, содержащий $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$. По определению класса $\mathrm{N}^\pi(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})$ получаем $\mathrm{N}^\pi(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}) \subseteq (\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}) \vee (\mathfrak{S}_\pi)_* = \mathfrak{X} \vee \mathrm{N}^\pi(\mathfrak{Y})$. Ввиду того, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{N}^\pi(\mathfrak{X})$, имеем $\mathrm{N}^\pi(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}) \subseteq \mathfrak{X} \vee \mathrm{N}^\pi(\mathfrak{Y}) \subseteq \mathrm{N}^\pi(\mathfrak{X}) \vee \mathrm{N}^\pi(\mathfrak{Y})$.

Итак, $\mathrm{N}^\pi(\mathfrak{X}) \vee \mathrm{N}^\pi(\mathfrak{Y}) = \mathrm{N}^\pi(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})$ и объединение π-нормальных классов Фиттинга $\mathrm{N}^\pi(\mathfrak{X})$ и $\mathrm{N}^\pi(\mathfrak{Y})$ – π-нормальный класс Фиттинга.

Докажем, что $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$, $\mathfrak{S}_\pi$. Предположим от противного, что $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$ для некоторых не π-нормальных классов $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$.

Покажем, что без ограничения общности классы $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ можно считать классами Локетта.

Ввиду утверждений (b) и (d) леммы 2.1 $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})_* = \mathfrak{X}_* \vee \mathfrak{Y}_* \subseteq \mathfrak{X}^* \vee \mathfrak{Y}^* \subseteq (\mathfrak{X}_* \vee \mathfrak{Y}_*)^*$. По утверждению (b) леммы 2.1 $(\mathfrak{X}_* \vee \mathfrak{Y}_*)^* = ((\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})_*)^* = (\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})^* = \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, $(\mathfrak{X}^* \vee \mathfrak{Y}^*)^* = (\mathfrak{X}_* \vee \mathfrak{Y}_*)^* = \mathfrak{S}_\pi$. По лемме 2.2 ((a) $\Leftrightarrow$ (c)) $\mathfrak{X}^* \vee \mathfrak{Y}^* \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$. Учитывая утверждение (b) леммы 2.1 и лемму 2.2 ((a) $\Leftrightarrow$ (c)), имеем $(\mathfrak{X}^*)^* = \mathfrak{X}^* \neq \mathfrak{S}_\pi$ и $(\mathfrak{Y}^*)^* = \mathfrak{Y}^* \neq \mathfrak{S}_\pi$. Таким образом, $\mathfrak{X}^*$, $\mathfrak{S}_\pi$, $\mathfrak{Y}^*$, $\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{X}^* \vee \mathfrak{Y}^* \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, без ограничения общности в качестве классов $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ можно взять классы Локетта.

Пусть σ – некоторое множество простых чисел такое, что $\sigma \subseteq \pi$. Предположим, что классы Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ удовлетворяют условию леммы 3.4. Тогда $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\sigma$ и $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}_{\sigma'}$.

Если $\sigma' = \varnothing$, то $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} = \mathfrak{X}$, $\mathfrak{S}_\pi$. Получили противоречие.

Если $\sigma' \neq \varnothing$, то $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\sigma$ и по утверждению (a) леммы 2.1 $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})^* \subseteq (\mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\sigma)^*$. Так как $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$, то по лемме 2.2 ((a) $\Leftrightarrow$ (c)) $(\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y})^* = \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, $\mathfrak{S}_\pi \subseteq (\mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\sigma)^* \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Значит, $(\mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\sigma)^* = \mathfrak{S}_\pi$. Ввиду леммы 2.2 ((a) $\Leftrightarrow$ (c)) $\mathfrak{Y}\mathfrak{S}_\sigma \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$. Так как $\mathfrak{S}_\sigma$ – насыщенный гомоморф, то по [10, лемма 3] $\mathfrak{Y} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$. Получили противоречие.

Пусть $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y} \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ не удовлетворяют условию леммы 3.4. Выберем группу $G \in \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$ такую, что $G_\mathfrak{X} G_\mathfrak{Y} < G$. Множество простых делителей факторгруппы $G / G_\mathfrak{X} G_\mathfrak{Y}$ конечно, однако π – некоторое бесконечное множество простых чисел. Следовательно, мы можем выбрать $p \in \pi$ такое, что $(p, |G / G_\mathfrak{X} G_\mathfrak{Y}|) = 1$. Тогда ввиду леммы 2.2 ((a) $\Leftrightarrow$ (b)) существует натуральное число n такое, что $K = G^{(n)} \text{Є} Z_p \in \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$. Так как $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – классы Локетта и $G^{(n)} \notin \mathfrak{X}$ и $G^{(n)} \notin \mathfrak{Y}$, то по лемме 2.4 $K_\mathfrak{X} = ((G^{(n)})_\mathfrak{X})^{\text{и}}$ и $K_\mathfrak{Y} = ((G^{(n)})_\mathfrak{Y})^{\text{и}}$. Применяя лемму 2.3, получаем $K_\mathfrak{X} = ((G_\mathfrak{X})^{(n)})^{\text{и}}$ и $K_\mathfrak{Y} = ((G_\mathfrak{Y})^{(n)})^{\text{и}}$. Следовательно, $K / K_\mathfrak{X} K_\mathfrak{Y} \cong (G / G_\mathfrak{X} G_\mathfrak{Y})^{(n)} \text{Є} Z_p \notin \mathfrak{N}_\pi$. По лемме 2.5 получаем, что $K \notin \mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$. Таким образом, полученное противоречие доказывает, что $\mathfrak{X} \vee \mathfrak{Y}$, $\mathfrak{S}_\pi$.

Так как $\mathrm{N}^\pi(\mathfrak{X}) \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathrm{N}^\pi(\mathfrak{Y}) \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$, то по [9, лемма 16] $\mathrm{N}^\pi(\mathfrak{X}) \cap \mathrm{N}^\pi(\mathfrak{Y}) \trianglelefteq \mathfrak{S}_\pi$.

По лемме 3.3 имеем $N^{\pi}(\mathfrak{X})\cap N^{\pi}(\mathfrak{Y})=(\mathfrak{X}\vee(\mathfrak{S}_{\pi})_{*})\cap(\mathfrak{Y}\vee(\mathfrak{S}_{\pi})_{*})$. Ввиду $\mathfrak{X}\subseteq((\mathfrak{S}_{\pi})_{*})^{*}=\mathfrak{S}_{\pi}$, по лемме 2.6 $\mathfrak{X}\vee(\mathfrak{S}_{\pi})_{*}=S_{n}(G:G=G_{\mathfrak{X}}G_{(\mathfrak{S}_{\pi})_{*}})$. Следовательно, по утверждениям (a) и (c) леммы 3.2 и лемме 2.7 $(\mathfrak{X}\vee(\mathfrak{S}_{\pi})_{*})\cap(\mathfrak{Y}\vee(\mathfrak{S}_{\pi})_{*})=(\mathfrak{X}\cap(\mathfrak{Y}\vee(\mathfrak{S}_{\pi})_{*}))\vee(\mathfrak{S}_{\pi})_{*}$.

Остается показать, что $\mathfrak{X}\cap(\mathfrak{Y}\vee(\mathfrak{S}_{\pi})_{*})$ не является π-нормальным классом Фиттинга.

Действительно, по утверждению (c) леммы 2.1 и по утверждению (d) леммы 3.2 $(\mathfrak{X}\cap(\mathfrak{Y}\vee(\mathfrak{S}_{\pi})_{*}))^{*}=\mathfrak{X}^{*}\cap\mathfrak{S}_{\pi}=\mathfrak{X}^{*}$. Так как $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{S}_{\pi}$, то по лемме 2.2 ((a) $\Leftrightarrow$ (c)) имеем $(\mathfrak{X}\cap(\mathfrak{Y}\vee(\mathfrak{S}_{\pi})_{*}))^{*}=\mathfrak{X}^{*}\neq\mathfrak{S}_{\pi}$. Таким образом, $\mathfrak{X}\cap(\mathfrak{Y}\vee(\mathfrak{S}_{\pi})_{*})$, $\mathfrak{S}_{\pi}$. Теорема доказана.

Заключение. В работе описано построение подрешетки решетки всех π-нормальных классов Фиттинга с помощью не π-нормальных классов Фиттинга.

Литература

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New-York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

2. Воробьёв, Н.Т. Конечные π-группы с нормальными инъекторами / Н.Т. Воробьёв, А.В. Марцинкевич // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 4. – С. 790–797.

3. Blessenohl, D. Über normale Schunk- und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Bd. 118, № 1. – S. 1–8.

4. Cusack, E. The join of two Fitting classes / E. Cusack // Math. Z. – 1979. – Bd. 167, № 1. – P. 37–47.

5. Lausch, H. On normal Fitting classes / H. Lausch // Math. Z. – 1973. – Bd. 130, № 1. – P. 67–72.

6. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). Издание 14 / Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН ; сост.: В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро. – Новосибирск : Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 1999. – 135 с.

7. Guo, W. Theory of classes groups / W. Guo. – Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London : Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000. – 258 p.

8. Lockett, F.P. The Fitting class $\mathfrak{F}^{*}$ / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137, № 2. – S. 131–136.

9. Савельева, Н.В. О проблеме существования максимальных подклассов минимального π-нормального класса Фиттинга / Н.В. Савельева, Н.Т. Воробьёв // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 1. – С. 29–37.

10. Савельева, Н.В. Максимальные по сильному π-вложению классы Фиттинга / Н.В. Савельева, Н.Т. Воробьев // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 2 (47). – С. 157–168.

Витебский государственный
университет им. П.М. Машерова

Поступила в редакцию 28.06.2019