

УДК 518:517.944/.947

МАТЕМАТИКА

А. В. ГУЛИН, член-корреспондент АН СССР А. А. САМАРСКИЙ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

1. Пусть H — конечномерное гильбертово пространство (вещественное или комплексное), A и B — линейные операторы, действующие в H , $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots\}$ — сетка на отрезке $0 \leq t \leq T$, $y_n = y(t_n) \in H$ — функции со значениями в H . Рассмотрим двухслойную разностную схему ⁽³⁾

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, y_0 \text{ задано,} \quad (1)$$

в которой A и B не зависят от n , B^{-1} существует.

Зададим самосопряженный положительный оператор D $((Dx, x) > 0$ для всех $0 \neq x \in H$) и образуем пространство H_D , состоящее из элементов $y, v, \dots \in H$ со скалярным произведением $(y, v)_D = (Dy, v)$ и нормой $\|y\|_D = \sqrt{(Dy, y)}$. Схема (1) называется устойчивой в пространстве H_D , если при любых $y_n \in H$ для решения y_{n+1} задачи (1) выполняется неравенство

$$\|y_{n+1}\|_D \leq \|y_n\|_D, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

В ^(1, 2) были получены необходимые и достаточные условия устойчивости схемы (1) в пространствах H_A и H_B в предположении, что хотя бы один из операторов (A или B) является самосопряженным и положительным. Условия устойчивости формулировались в виде неравенств между A и B . Так, если $A^* = A > 0$, то необходимое и достаточное условие устойчивости в H_A имеет вид

$$B_0 \geq 0,5 \tau A, \quad B_0 = 0,5(B + B^*). \quad (3)$$

В настоящей работе рассматриваются разностные схемы, в которых оба оператора (A и B) являются несамосопряженными.

2. Теорема 1. Пусть операторы A и B связаны тождеством

$$B = D + \sigma \tau A, \quad (4)$$

где σ — число, D — самосопряженный положительный оператор.

Тогда, если A^{-1} существует, то необходимым и достаточным условием устойчивости в H_D схемы (1) является условие

$$A_0 + (\sigma_0 - 0,5)\tau A^* D^{-1} A \geq 0, \quad A_0 = 0,5(A + A^*), \quad \sigma_0 = \operatorname{Re} \sigma. \quad (5)$$

Доказательство. Применяя к схеме (1) оператор DA^{-1} , запишем ее в виде

$$\tilde{B}y_l + \tilde{A}y = 0, \quad y_l = \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}, \quad \tilde{A} = D, \quad \tilde{B} = DA^{-1}B.$$

Условия (3) приводят к неравенству $(DA^{-1}B)_0 \geq 0,5 \tau D$, откуда, учитывая (4), получаем

$$D(A^{-1})_0 D + (\sigma_0 - 0,5)\tau D \geq 0,$$

что эквивалентно (5).

Пример 1. На сетке $\omega_h = \{0, x_1, \dots, x_N\}$ с шагами $h_i = x_i - x_{i-1}$ дана схема

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + a_i \left(\sigma \frac{y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{h_i} + (1 - \sigma) \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h_i} \right) = 0, \quad y_0^n = 0, \quad (6)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$, $n = 0, 1, \dots$, σ — числовой параметр, $a_i > 0$. Пространство H состоит из действительных функций $y, v, \dots$, заданных на сетке $\omega_h^+ = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ и снабжено скалярным произведением $(y, v) =$

$$= \sum_{i=1}^N y_i v_i. \text{ Вводя операторы } A \text{ и } B:$$

$$(Ay)_1 = y_1, \quad (Ay)_i = y_i - y_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, N,$$

$$(By)_i = \frac{h_i}{a_i} y_i + \sigma \tau (Ay)_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

запишем (6) в виде (4). Тождество (4) выполнено с $(Dy)_i = h_i y_i / a_i$, а условие устойчивости (5) приводит к неравенству $0,5 + (\sigma - 0,5) \tau a_i / h_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$. При этом справедлива оценка (2), где $\|y\|_{D^2}^2 =$

$$= \sum_{i=1}^N h_i y_i^2 / a_i.$$

Пример 2. На равномерной сетке $\omega_h = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ дана схема

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} &= \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \\ \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} &= \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ u_N^n &= v_0^n = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Введем сетку $\omega_h^- = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ и пространство H_1 функций, заданных на ω_h^- , со скалярным произведением $[y, v] = \sum_{i=0}^{N-1} y_i v_i h$. Аналогично, H_2 — пространство функций $y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$, заданных на $\omega_h^+ = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ со скалярным произведением $(y, v) = \sum_{i=1}^N y_i v_i h$. Определим операторы $L: H_1 \rightarrow H_2$, $L^*: H_2 \rightarrow H_1$ следующим образом:

$$\begin{aligned} (Ly)_i &= (y_i - y_{i-1}) / h, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (Ly)_N = -y_{N-1} / h, \\ (L^*v)_0 &= v_1 / h, \quad (L^*v)_i = -(v_{i+1} - v_i) / h, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Эти операторы сопряжены в том смысле, что $(Ly, v) = [y, L^*v]$. Пусть H — прямая сумма пространств H_1 и H_2 , $y = \{y^{(1)}, y^{(2)}\} \in H$, $v = \{v^{(1)}, v^{(2)}\} \in H$. Определим в H скалярное произведение $(y, v) = [y^{(1)}, v^{(1)}] + (y^{(2)}, v^{(2)})$ и зададим операторы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L^* \\ -L & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\tau L & E \end{pmatrix},$$

где E — единичный оператор. Тогда схему (7) можно записать в виде (1), где $y = \{u, v\} \in H$. Условие (4) выполнено с $\sigma = 0,5$ и

$$D = 0,5(B + B^*) = \begin{pmatrix} E & -0,5\tau L^* \\ -0,5\tau L & E \end{pmatrix}.$$

При этом $(Du, u) = [u, u] - \tau(v, Lu) + (v, v)$ и оператор D положителен, если $\tau < h$. Так как A — кососимметричный оператор, то условие

устойчивости (5) выполняется со знаком равенства. Следовательно, схема (7) устойчива при $\tau < h$.

3. Рассмотрим факторизованные схемы для уравнения Шредингера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{i} \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \quad (8)$$

в кубе $0 \leq x_\alpha \leq 1$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, с нулевыми граничными условиями. Введем пространство H функций $y(x_j)$, $v(x_j)$, $\dots$, заданных на кубической сетке

$$\omega_h = \{x_j = (j_1 h, \dots, j_\alpha h, \dots, j_p h), j_\alpha = 0, 1, \dots, N\}$$

и равных нулю на ее границе. В H определим скалярное произведение $(y, v) = \sum_{x \in \omega_h} y(x) \bar{v}(x) h^p$. Зададим в H операторы A_α ($\alpha = 1, 2, \dots, p$):
 $-h^2 A_\alpha y(x_j) = y(j_1 h, \dots, (j_\alpha + 1)h, \dots, j_p h) - 2y(x_j) + y(j_1 h, \dots, (j_\alpha - 1)h, \dots, j_p h)$.

Операторы A_α являются положительно определенными и попарно перестановочными.

Пример 3. Исключение промежуточных значений из локально-одномерной схемы ⁽³⁾, построенной для (8), приводит к факторизованной схеме

$$\prod_{\alpha=1}^p (E - i\tau A_\alpha) y_{n+1} = y_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

которую можно записать в виде (1) с

$$B = \prod_{\alpha=1}^p (E - i\tau A_\alpha), \quad A = (B - E)/\tau.$$

Условие (4) выполнено с $D = E$, $\sigma = 1$. Неравенство (5) принимает вид $B^* B \geq E$ и выполняется при любых τ и h . Схема (9) абсолютно устойчива в H .

Следующий пример показывает, что условие $D > 0$ в теореме 1 не является необходимым для устойчивости.

Пример 4. Аналогом схемы Писмена — Рекфорда для уравнения (8) при $p = 2$ является схема

$$(E - 0,5i\tau A_1)(E - 0,5i\tau A_2)y_{n+1} = (E + 0,5i\tau A_1)(E + 0,5i\tau A_2)y_n, \quad (10)$$

для которой $A = -i(A_1 + A_2)$, $B = (E - 0,5i\tau A_1)(E - 0,5i\tau A_2)$. Тождество (4) выполнено с $\sigma = 0,5$ и $D = E - (\tau^2/4)A_1 A_2$. Оператор D положителен лишь при $\tau < 0,5h^2$. Вместе с тем схема (10) абсолютно устойчива в H . Действительно, записывая (10) в виде $y_{n+1} = S y_n$, получаем $S^* S = E$, т. е. $\|y_{n+1}\| = \|y_n\|$.

4. Имеются схемы, неустойчивые в смысле (2) при любом операторе $D^* = D > 0$. Покажем, что не существует оператора $D^* = D > 0$ такого, что схема:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A y_n = 0, \quad A^* = -A, \quad A^{-1} \text{ существует}, \quad (11)$$

была бы устойчивой в H_D . Применим к (11) оператор D и воспользуемся теоремой 1. Условие (4) выполнено с $\sigma = 0$, а неравенство (5) принимает вид

$$DA - AD \geq \tau A^* DA. \quad (12)$$

Так как $D > 0$ и A^{-1} существует, то в правой части (12) находится положительный оператор. Вместе с тем левая часть (12) представляет собой коммутатор двух операторов и не может быть положительной (след $DA - AD$ равен нулю, см. ⁽⁴⁾, задача 473).

5. Расширим определение устойчивости. Именно, вместо (2) будем требовать

$$\|y_{n+1}\|_D \leq \rho \|y_n\|_D, \quad n = 0, 1, \dots \quad (13)$$

с какой-либо постоянной ρ (такой, что ρ^n ограничено при всех n). Требование (13) с $D = E$ для схемы (11) эквивалентно выполнению неравенства

$$(\rho^2 - 1)E \geq \tau^2 A^* A$$

или $\tau^2 \|A\|^2 \leq \rho^2 - 1$. Это условие выполнено, если

$$\tau \|A\|^2 \leq c_0^2, \quad c_0 = \text{const}, \quad (14)$$

и $\rho = 1 + 0,5c_0^2\tau$.

Аналогично доказывается, что схема $(y_{n+1} - y_n) / \tau + A(\sigma y_{n+1} + (1 - \sigma)y_n) = 0$, $A^* = -A$, где σ — действительный параметр, абсолютно устойчива в H с постоянной $\rho = 1$ при $\sigma \geq 0,5$ и устойчива в H при условии (14) с постоянной $\rho = 1 + (0,5 - \sigma)c_0^2\tau$, если $\sigma < 0,5$.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
10 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. А. Самарский, ДАН, 181, № 4, 808 (1968). ² А. В. Гулин, А. А. Самарский, ДАН, 181, № 5, 1042 (1968). ³ А. А. Самарский, Введение в теорию разностных схем, «Наука», М., 1971. ⁴ Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре, М.—Л., 1952.