

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

А. К. ГУЩИН

**ОБ ОЦЕНКАХ СНИЗУ РЕШЕНИЙ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА
В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ
ОБЛАСТЯХ**

(Представлено академиком В. С. Владимировым 7 III 1972)

Пусть Ω — неограниченная область n -мерного пространства E_n , $n \geq 2$, граница Γ которой состоит из конечного числа непересекающихся, замкнутых или неограниченных поверхностей Ляпунова.

В заметке ⁽¹⁾ рассматривалась функций Грина $G(t, x; 0, \xi)$ второй и третьей краевой задачи в цилиндре $\Omega \times (t > 0)$ для линейного параболического уравнения второго порядка. Были выделены такие классы областей $\mathfrak{B}(g)$, что если $\Omega \in \mathfrak{B}(g)$, то при некоторых условиях на коэффициенты уравнения (в частности, гарантирующих выполнение принципа максимума) для всех $t > 0$ справедлива оценка

$$\sup_{x \in \Omega} G(t, x; 0, \xi) \leq C/v(\sqrt{t}), \quad (1)$$

где $v(R) = \text{mes}_n \{(|x| < R) \cap \Omega\}$ (считаем, что начало координат принадлежит Ω), а постоянная C одна и та же для всех уравнений с общей постоянной эллиптичности.

В настоящей заметке рассматривается вопрос о точности оценки (1) для функции Грина второй краевой задачи для уравнения без младших членов

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = L[u] = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_j} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial N} \Big|_{x \in \Gamma} = 0, \quad (3)$$

где симметричная матрица $a_{ij}(t, x)$ удовлетворяет условию

$$0 < \gamma \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) y_i y_j \leq \gamma^{-1} \quad (4)$$

для любого единичного вектора $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, а N — внешняя (по отношению к Ω) кономаль эллиптического оператора L .

Пусть определенная при $v > 0$ функция $g(v)$ непрерывна, положительна, монотонно не убывает и, кроме того, существует такая постоянная ε_0 , $0 < \varepsilon_0 \leq 1/n$, что монотонно не убывает функция $v^{1-\varepsilon_0}/g(v)$. Рассмотрим функцию

$$l(v) = \inf_{\text{mes}_n Q=v} \text{mes}_{n-1} [\partial Q \cap \Omega],$$

где Q — произвольное открытое подмножество области Ω , ∂Q — граница Q , а mes_k — k -мерная мера.

Область Ω принадлежит классу $\mathfrak{B}(g)$ ⁽¹⁾, если

$$l(v) \geq g(v)$$

и существует $d = d(\xi)$ такая, что

$$s_\xi(R) = \text{mes}_{n-1}\{(|x - \xi| = R) \cap \Omega\} \leq d\mathcal{F}_{-1}(R) / R,$$

где функция $\mathcal{F}_{-1}(R)$ обратная к $\mathcal{F}(v) = v / g(v)$.

Данное определение эквивалентно следующему ⁽¹⁾: существует $d_1 = d_1(\xi)$ такая, что

$$g(v) \leq l(v) \leq s_\xi(R_\xi(v)) \leq d_1(\xi)g(v),$$

где функция $R_\xi(v)$ обратная к $v_\xi(R) = \text{mes}_n\{(|x - \xi| < R) \cap \Omega\}$.

Пусть, как и в ⁽¹⁾, граница области Ω удовлетворяет следующему условию: существуют такие постоянные $\delta_0 > 0$ и $a_0 > 0$, что для любой точки $x_0 \in \Gamma$ пересечение шара $|x - x_0| \leq \delta_0$ с поверхностью Γ связно и $(v(x_1), v(x_2)) \geq a_0$ для $x_1 \in \Gamma$, $x_2 \in \Gamma$, $|x_1 - x_2| \leq \delta_0$, где $v(x)$ — единичный вектор внешней (по отношению Ω) нормали к Γ . Если коэффициенты уравнения (2) достаточно гладкие $(a_{ij}(t, x))$ удовлетворяют условию Гёльдера по переменным t и x , производные $\partial a_{ij}(t, x) / \partial x_i$ существуют, ограничены и удовлетворяют условию Гёльдера по переменным x , то справедливо следующее утверждение, устанавливающее точность оценки (1).

Теорема 1. Пусть $\Omega \in \mathfrak{B}(g)$, тогда существует такая постоянная k , зависящая лишь от γ , ε_0 и $d = d(\xi)$, что при всех $t > 0$ и $\xi \in \Omega$ для функции Грина $G(t, x; 0, \xi)$ задачи (2), (3) имеет место оценка

$$\sup_{x \in \Omega \cap \{|x - \xi| < 2k\sqrt{t}\}} G(t, x; 0, \xi) \geq \frac{1}{2v_\xi(2k\sqrt{t})} \geq c_0/\mathcal{F}_{-1}(\sqrt{t}) \geq c/v(\sqrt{t}), \quad (5)$$

где $c_0 = 2^{-(1+1/\varepsilon_0)}k^{-1/\varepsilon_0}d^{-1}$, а $c = \varepsilon_0^{1/\varepsilon_0}c_0$.

Таким образом, оценки (1) и (5) дают

$$c/v(\sqrt{t}) \leq \sup_{x \in \Omega} G(t, x; 0, \xi) \leq C/v(\sqrt{t}). \quad (6)$$

Рассмотрим решение $u(t, x)$ задачи (2), (3) с начальным условием

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad (7)$$

где $\varphi(x) \in L_1(\Omega)$. Тогда из оценки (1) получаем, что

$$|u(t, x)| \leq C\|\varphi\|_{L_1(\Omega)} / v(\sqrt{t}). \quad (8)$$

Заметим, что так как постоянная C зависит лишь от γ из условия (4), ε_0 и $d(0)$, ⁽¹⁾, то для справедливости неравенства (8) достаточно требовать, чтобы коэффициенты уравнения (2) были измеримыми функциями, удовлетворяющими условию (4).

Точность оценки (8) устанавливает следующая

Теорема 2. Пусть $\Omega \in \mathfrak{B}(g)$, конечны интегралы

$$I_1 = \int_{\Omega} |\xi| |\varphi(\xi)| d\xi, \quad I_2 = \int_{\Omega} |\varphi(\xi)| \ln(d(\xi) + 1) d\xi;$$

тогда для решения $u(t, x)$ задачи (2), (3), (7) имеет место неравенство

$$\sup_{x \in \Omega} |u(t, x)| \geq \frac{|J|}{2v(2[d_2 \sqrt{t} I_2 + I_1]/|J|)}, \quad (9)$$

$$J = \int_{\Omega} \varphi(\xi) d\xi,$$

где постоянная d_2 зависит только от ε_0 и γ .

Аналогичные оценки в случае менее полной «степенной» шкалы классов областей были получены в (2, 3). Так, в заметке (3) было показано, что если $\Omega \in \mathfrak{B}(\alpha, n)$, $1 \leq \alpha \leq n$, где

$$\mathfrak{B}(\alpha, n) = \bigcup_{d_0 > 0} \mathfrak{B}(d_0 \min\{v^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, v^{\frac{n-1}{n}}\}),$$

то имеют место неравенства

$$c_1/\min\{t^{\alpha/2}, t^{n/2}\} \leq \sup_{x \in \Omega} G(t; x; 0, \xi) \leq C_1/\min\{t^{\alpha/2}, t^{n/2}\};$$

функция $v(R)$ в этом случае оценивается снизу и сверху с некоторыми постоянными функцией $\min\{t^{\alpha/2}, t^{n/2}\}$.

Рассмотрим область вида $x_2 > f(x_1)$, $f(0) = 0$, $n = 2$, где гладкая четная функция $f(x_1)$ имеет монотонно неубывающую производную. Тогда можно показать, что $\Omega \in \mathfrak{B}\left(\min\left\{\sqrt{\frac{v}{\pi+4}}, \tilde{f}_{-1}\left(\frac{v}{\pi+4}\right)\right\}\right)$, где функция $\tilde{f}_{-1}(v)$ обратная к $\tilde{f}(x_1) = x_1 f(x_1)$. Оценки (6) в этом случае будут иметь вид

$$\begin{aligned} \text{const} \max\{t^{-1}, (\sqrt{t} \tilde{f}_{-1}(\sqrt{t}))^{-1}\} &\leq \sup_{x \in \Omega} G(t, x; 0, \xi) \leq \\ &\leq \text{const} \max\{t^{-1}, (\sqrt{t} \tilde{f}_{-1}(\sqrt{t}))^{-1}\}. \end{aligned}$$

Например, если $f(x_1)$ при $x_1 \rightarrow \infty$ эквивалентна функции $x_1^\beta \ln x_1$, $\beta \geq 1$, то функция $(\sqrt{t} \tilde{f}_{-1}(\sqrt{t}))^{-1}$ при больших t ведет себя как $t^{-(\beta+1)/(2\beta)} \ln^{1/\beta} t$. Т. е. при больших t

$$\text{const} t^{-(\beta+1)/(2\beta)} \ln^{1/\beta} t \leq \sup_{x \in \Omega} G(t, x; 0, \xi) \leq \text{const} t^{-(\beta+1)/(2\beta)} \ln^{1/\beta} t.$$

Следовательно, такая область не принадлежит ни одному классу $\mathfrak{B}(\alpha, n)$ (в случае областей из $\mathfrak{B}(\alpha, n)$ имеет место точная (сверху и снизу) степенная оценка).

Из теоремы 2 следует, что решения задачи (2), (3), (7) с финитной и с произвольной из $L_1(\Omega)$ начальными функциями (считаем, что интегралы по Ω от начальных функций отличны от нуля) имеют один и тот же порянок стремления к нулю при $t \rightarrow \infty$. Кроме того, из оценки (9) получаем, что условие $\varphi(x) \in L_1(\Omega)$ для стремления решения к нулю как $v^{-1}(\sqrt{t})$, вообще говоря, ослабить нельзя. Действительно, пусть $\varphi(x) \geq 0$ и для всех $R > 0$ $\varphi(x) \in L_1(\Omega_R)$, где $\Omega_R = \Omega \cap (|x| < R)$. Тогда для любого $R > 0$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \Omega} |u(t, x)| &\geq \Phi(R)/2v(2d_1 \ln \hat{d}(R) \sqrt{t} + 2R) \geq \\ &\geq \text{const} \Phi(R)/v(\sqrt{t} \ln \hat{d}(R) + R), \end{aligned}$$

где

$$\hat{d}(R) = 1 + \sup_{\xi \in \Omega_R} d(\xi), \quad \Phi(R) = \int_{\Omega_R} \varphi(\xi) d\xi.$$

Или при $R = \sqrt[n]{t}$

$$\sup_{x \in \Omega} |u(t, x)| \geq \text{const } \Phi(\sqrt[n]{t}) / \nu(\sqrt[n]{t} \ln \hat{d}(\sqrt[n]{t})).$$

Пусть для всех $\xi \in \Omega$ $d(\xi) \leq d_0$. Это справедливо, например, при $\Omega \in \mathfrak{B}(\text{const } \nu^{(n-1)/n})$ (так как в этом случае $s_\xi(R) \leq \text{const } R^{n-1} = \mathcal{F}_{-1}(R) / R$) или когда Ω — цилиндр $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leq 1$ ($s_\xi(R) \leq \text{const } \min \{R^{n-1}, 1\} \leq \text{const } \mathcal{F}_1(R) / R$). Тогда

$$\sup_{x \in \Omega} |u(t, x)| \geq \text{const } \Phi(\sqrt[n]{t}) / \nu(\sqrt[n]{t}). \quad (10)$$

Следовательно, если $\varphi(x) \notin L_1(\Omega)$, т. е. $\Phi(R) \rightarrow \infty$ при $R \rightarrow \infty$, то не может быть справедливой оценка (8).

Пусть $\Omega \in \mathfrak{B}(\text{const } \nu^{(n-1)/n})$, а $\varphi(x) = |x - x_0|^{-\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq n$, $x_0 \notin \Omega$. Тогда при достаточно больших R $\Phi(R) \geq \text{const } R^{n-\alpha}$ для $\alpha < n$ и $\Phi(R) \geq \text{const } \ln R$ для $\alpha = n$. Формула (10) тогда имеет вид

$$\sup_{x \in \Omega} |u(t, x)| \geq \text{const} \begin{cases} t^{-\alpha/2} & \text{при } \alpha < n. \\ \ln t / t^{n/2} & \text{при } \alpha = n. \end{cases}$$

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
21 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. К. Гу щ и н, ДАН, 206, № 4 (1972). ² А. К. Гу щ и н, ДАН, 203, № 2 (1972).
³ А. К. Гу щ и н, Дифференциальные уравнения, 6, № 4, 741 (1970).