

УДК 519.24

МАТЕМАТИКА

Т. АРАК

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМУМА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

(Представлено академиком Ю. В. Линником 19 IV 1972)

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины. Будем предполагать, что $EX_k = 0$, $E|X_k|^3 = \gamma_{3k} < \infty$, $k = 1, \dots, n$.

Введем следующие обозначения:

$$S_{jk} = \sum_{i=j+1}^k X_i, \quad \bar{S}_k = \max_{i \leq k} S_{0i}, \quad B_{jk}^2 = \sum_{i=j+1}^k DX_i, \quad j < k.$$

Настоящая заметка посвящена оценке величины

$$\Delta_n(x) = \left| P(\bar{S}_n < xB_{0n}) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-y^2/2} dy \right|, \quad x \geq 0.$$

В работе С. В. Нагаева ⁽⁴⁾ доказано, что если случайные величины $X_1, \dots, X_n$ одинаково распределены, то

$$\Delta_n(x) \leq C_1 \frac{\gamma_{31}^2}{(DX_1)^3} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

В общем случае из оценки Ю. В. Прохорова в ⁽²⁾ следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\Delta_n(x) = O(L_n^{1/4} \log^2 L_n),$$

где $L_n = (\sum_{k=1}^n \gamma_{3k}) / B_{0n}^3$ — дробь Ляпунова.

В. Б. Невзоровым доказано, что

$$\Delta_n(x) \leq C_2 \frac{\max\{L_n^{1/3}, L_n\}}{1 + |x|^3}. \quad (1)$$

(Для симметричных случайных величин это неравенство приведено в ⁽⁵⁾.) В случае одинаково распределенных слагаемых неравенство (1) дает скорость сходимости лишь $n^{-1/5}$. Оказывается, что посредством дроби Ляпунова и невозможно точнее оценить $\Delta_n(x)$.

Автором совместно с В. Б. Невзоровым построен пример такой последовательности случайных величин $X_1, X_2, \dots$, что при $n \rightarrow \infty$ $B_{0n} \rightarrow \infty$, но не выполняется соотношение

$$\sup_x \Delta_n(x) = o(L_n^{1/3}).$$

Введение несимметричных оценок позволяет сократить разрыв между оценками в случаях одинаково и неодинаково распределенных слагаемых до логарифмического множителя.

1. Теорема 1. Существует такая абсолютная постоянная C_3 , что

$$\Delta_n(x) \leq C_3 \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_{3k}}{(B_{0k}^2 + x^2 B_{0n}^2) B_{k-1n}}.$$

З а м е ч а н и е 1. Из теоремы 1 следует, например, что

$$\Delta_n(x) \leq C_4 \rho_n \frac{1 + \min\{|\log x|, |\log \rho_n|\}}{1 + x^2}, \quad (2)$$

где $\rho_n = \max_k \frac{\gamma_{3k}}{D X_k B_{0n}}$. Отметим также, что неравенство

$$\Delta_n(x) \leq C_5 L_n^{1/3}$$

может быть получено как следствие из теоремы 1.

Оказывается, что неравенство (2) может быть усилено.

Теорема 2. Существует такая абсолютная постоянная C_6 , что

$$\Delta_n(x) \leq C_6 \frac{\rho_n}{1 + x^2}.$$

З а м е ч а н и е 2. В случае одинаково распределенных слагаемых из теоремы 2 получим

$$\Delta_n(x) \leq C_6 \frac{\gamma_{31}}{(D X_1)^{3/2}} \frac{1}{V^n} \frac{1}{1 + x^2}.$$

Основным орудием доказательства служит одно усиление теоремы Берри — Эссеена, приведенное А. Бикялисом в (3):

$$\left| \mathbf{P}(S_{0n} < x B_{0n}) - \frac{1}{V^{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy \right| \leq C_7 \frac{L_n}{1 + |x|^3}. \quad (3)$$

Будем предполагать, что $B_{0n} = 1$.

Л е м м а 1. Пусть $a > L_n$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_n(x) \leq C_8 & \left(\frac{a}{1 + x^2} + \sum_{k=1}^n \mathbf{E} \frac{X_k}{B_{k-1n}} \chi_{[X_k > a]} \mathbf{P}(A_k | X_k) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^n \min \left\{ \sum_{i=k}^n \frac{\gamma_{3i}}{B_{k-1n}^3}, 1 \right\} \mathbf{P}(A_k) \right), \end{aligned}$$

где $A_k = (\bar{S}_{k-1} < x; S_{0k} \geq x)$.

Далее вероятности $\mathbf{P}(A_k | X_k = z) = \mathbf{P}(\bar{S}_{k-1} < x; S_{0k-1} \geq x - z)$ оцениваются через суммы произведений вероятностей вида

$$\mathbf{P}(\bar{S}_l < x), \quad (4)$$

$$\mathbf{P}(b < S_{lm} < b + z), \quad (5)$$

$$\mathbf{P}(\min_{m \leq j < k} S_{jk-1} > -z; S_{mk-1} > b), \quad 0 < l < m < k. \quad (6)$$

Вероятности вида (5) легко оцениваются посредством (3). Следующий пункт посвящен оценке вероятностей вида (4) и (6).

2. Л е м м а 2.

$$\mathbf{P}(\bar{S}_n < x) \leq C_9 \left(x + L_n + \sum_{k=1}^n \mathbf{E} X_k \mathbf{P}(A_k | X_k) \right).$$

Исходя из неравенства

$$P(A_k | X_k = z) \leq P(x - z \leq S_{0k-1} < x) \leq \frac{z}{B_{0k-1}} + \left(\sum_{i=1}^{k-1} \gamma_{3i} \right) / B_{0k-1},$$

при помощи леммы 2 последовательно получим леммы 3, 4 и 5.

Л е м м а 3.

$$P(\bar{S}_n < x) \leq C_{10} \left(x + \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_{3k}}{B_{0k}}} \right).$$

Л е м м а 4.

$$P(\bar{S}_n < x) \leq C_{11} \left(x + \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_{3k}}{B_{0k}^{3/4}} \right)^{3/4} \right).$$

Л е м м а 5. Пусть случайные величины $X_1, \dots, X_n$ удовлетворяют условию

$$\gamma_{3k} \leq 7(DX_k)^{3/2}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Тогда

$$P(\bar{S}_n < x) \leq C_{12} \left(x + L_n + \sum_{k=1}^n \frac{(DX_k)^{13/8}}{B_{0k}^{3/4}} \right).$$

Л е м м а 6. Пусть выполнено условие (7). Тогда при $x \leq y$

$$P(\bar{S}_n < x; S_{0n} < x - y) \leq C_{13} \left(\frac{1}{1 + (y - x)^2} \left(x + L_n + \sum_{k=1}^n \frac{(DX_k)^{13/8}}{B_{0k}^{3/4}} \right) \right).$$

Для того чтобы можно было применять леммы 5 и 6 в случае, когда условие (7) не выполнено, достаточно объединить слагаемые в группы. Из одного неравенства С. Н. Бернштейна, доказанного для симметричных случайных величин (см. (1), стр. 361), следует, что

$$E|S_{0k}|^3 \leq 2^{5/2} B_{0k}^3 + 2^4 \sum_{i=1}^k \gamma_{3i}. \quad (8)$$

(Вывод неравенства (8) любезно предоставлен автору И. А. Ибрагимовым.) Положим $\alpha(0) = 0$ и определим последовательность индексов $\alpha(k)$ следующим соотношением:

$$\alpha(k+1) = \max \left\{ j | \alpha(k) < j \leq n; \sum_{i=\alpha(k)+1}^j \gamma_{3i} > 2^{-4} B_{\alpha(k), j} \right\} + 1.$$

Тогда, в силу неравенства (8),

$$E|S_{\alpha(k), \alpha(k+1)}|^3 \leq 7B_{\alpha(k), \alpha(k+1)}^3 \leq 7 \cdot 2^5 \sum_{i=\alpha(k)+1}^{\alpha(k+1)} \gamma_{3i}.$$

Автор выражает глубокую благодарность проф. И. А. Ибрагимову за ценные советы и внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
14 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Н. Бернштейн, собр. соч., 4, «Наука», 1964. ² Ю. В. Прохоров, Теория вероятн. и ее применения, 1, в. 2, 177 (1956). ³ А. Бикялис, Лит. матем. сборн., 6, № 3, 323 (1966). ⁴ С. В. Нагаев, Теория вероятн. и ее применения, 15, в. 2, 320 (1970). ⁵ В. Б. Невзоров, Теория вероятн. и матем. стат., в. 3, 105 (1970).