

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

И. И. БАВРИН

ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В ПОЛИЦИЛИНДРЕ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 18 IV 1972)

Автором ⁽¹⁾ в случае круга были установлены обобщенные интегральные формулы Коши, Шварца и Пуассона, ассоциированные с данными системами функций $\omega_j = \omega_j(x) \in \Omega$, $j = 1, 2, \dots, m$; $\tilde{\omega}_{\tilde{j}} = \tilde{\omega}_{\tilde{j}}(x) \in \Omega$, $\tilde{j} = 1, 2, \dots, \tilde{m}$ *. В настоящей заметке дается обобщение этих формул на случай полицилиндра.

1. Пусть функции $\omega_q^{(l)} = \omega_q^{(l)}(x) \in \Omega$, $\tilde{\omega}_q^{(l)} = \tilde{\omega}_q^{(l)}(x) \in \Omega$; $q = 1, 2, \dots, m_l$; $\tilde{q} = 1, 2, \dots, \tilde{m}_l$; $l = 1, 2, \dots, n$. Пусть далее $p_q^{(l)}(0) = 1$, $\tilde{p}_{\tilde{q}}^{(l)}(0) = 1$,

$$p_q^{(l)}(r) = r \int_r^1 \frac{\omega_q^{(l)}(x)}{x^2} dx, \quad \tilde{p}_{\tilde{q}}^{(l)}(r) = r \int_r^1 \frac{\tilde{\omega}_{\tilde{q}}^{(l)}(x)}{x^2} dx, \quad r \in (0, 1],$$

$$\Delta_0^{(q, l)} = 1, \quad \tilde{\Delta}_0^{(\tilde{q}, l)} = 1, \quad \Delta_k^{(q, l)} = -(k+1) \int_0^1 r^k dp_q^{(l)}(r) = k \int_0^1 r^{k-1} \omega_q^{(l)}(r) dr,$$

$$\tilde{\Delta}_k^{(\tilde{q}, l)} = -(k+1) \int_0^1 r^k d\tilde{p}_{\tilde{q}}^{(l)}(r) = k \int_0^1 r^{k-1} \tilde{\omega}_{\tilde{q}}^{(l)}(r) dr,$$

$$q = 1, 2, \dots, m_l; \quad \tilde{q} = 1, 2, \dots, \tilde{m}_l; \quad l = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots **$$

2. Пусть функция $f(re^{i\varphi}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(re^{i\varphi})^k$ голоморфна в круге $|z| < R$.

Автором ⁽³⁾ введены взаимно обратные операторы $N^{(\omega; \tilde{\omega})}$, $N^{(\tilde{\omega}; \omega)}$ ***. Легко видеть, что функции $N^{(\omega; \tilde{\omega})}[f(re^{i\varphi})]$, $N^{(\tilde{\omega}; \omega)}[f(re^{i\varphi})]$, голоморфны в том

* Говорят ⁽²⁾, что функция $\omega(x) \in \Omega$, если она неотрицательна и непрерывна на $[0, 1]$, причем $\omega(0) = 1$, $\int_0^1 \omega(x) dx < +\infty$ и для любого r , $0 \leq r < 1$, $\int_r^1 \omega(x) dx > 0$.

** В ⁽²⁾ введена функция $p(r) = r \int_r^1 \frac{\omega(x)}{x^2} dx$, $\omega(x) \in \Omega$, $r \in (0, 1]$, $p(0) = 1$, и последовательность чисел $\Delta_k = -(k+1) \int_0^1 r^k dp(r)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и при этом показано, что все числа Δ_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, положительны, причем $\Delta_0 = 1$, $\Delta_k = k \int_0^1 \omega(x) x^{k-1} dx$.

*** Напомним, что здесь $(\omega; \tilde{\omega}) = (\omega_1, \dots, \omega_m; \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_m)$, $(\tilde{\omega}; \omega) = (\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_m; \omega_1, \dots, \omega_m)$.

же круге $|z| < R$, причем

$$N^{(\omega; \tilde{\omega})}[f(re^{i\varphi})] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta_k^{(1)} \dots \Delta_k^{(m)}}{\tilde{\Delta}_k^{(1)} \dots \tilde{\Delta}_k^{(m)}} a_k (re^{i\varphi})^k,$$

$$N^{(\tilde{\omega}; \omega)}[f(re^{i\varphi})] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{\Delta}_k^{(1)} \dots \tilde{\Delta}_k^{(m)}}{\Delta_k^{(1)} \dots \Delta_k^{(m)}} a_k (re^{i\varphi})^k.$$

В (1, 3) автором установлено, что для любого ρ , $0 < \rho < R$, справедлива интегральная формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N^{(\tilde{\omega}; \omega)} \left[C \left(e^{-i\theta} \frac{re^{i\varphi}}{\rho} \right) \right] N^{(\omega; \tilde{\omega})}[f(\rho e^{i\theta})] d\theta, \quad z = re^{i\varphi}, \quad (1)$$

где $C(w) = 1/(1-w)$.

3. Пусть функция $f(z_1, \dots, z_n)$ голоморфна в полицилиндре $E = \{|z_l| < R_l, l = 1, \dots, n\}$. Тогда в E имеем

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} a_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}, \quad (2)$$

или

$$f(r_1 e^{i\varphi_1}, \dots, r_n e^{i\varphi_n}) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} a_{k_1, \dots, k_n} (r_1 e^{i\varphi_1})^{k_1} \dots (r_n e^{i\varphi_n})^{k_n}.$$

Так как функция $f(z_1, \dots, z_n)$ голоморфна в E , то $f(z_1, \dots, z_n)$ голоморфна по каждому переменному $z_1, \dots, z_n$. В силу предыдущего, действуя оператором $N^{(\omega^{(l)}; \tilde{\omega}^{(l)})} *$ на $f(r_1 e^{i\varphi_1}, \dots, r_n e^{i\varphi_n})$ как на функцию r_l , $l = 1, 2, \dots, n$ (в этом случае этот оператор обозначим через $N_l^{(\omega^{(l)}; \tilde{\omega}^{(l)})}$), будем иметь, что функция

$$N_l^{(\omega^{(l)}; \tilde{\omega}^{(l)})}[f(r_1 e^{i\varphi_1}, \dots, r_n e^{i\varphi_n})] =$$

$$= \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{k_l}^{(m_l)}}{\tilde{\lambda}_{k_l}^{(\tilde{m}_l)}} a_{k_1, \dots, k_n} (r_1 e^{i\varphi_1})^{k_1} \dots (r_n e^{i\varphi_n})^{k_n},$$

где $\lambda_{k_l}^{(m_l)} = \Delta_{k_l}^{(1, l)} \dots \Delta_{k_l}^{(m_l, l)}$, $\tilde{\lambda}_{k_l}^{(\tilde{m}_l)} = \tilde{\Delta}_{k_l}^{(1, l)} \dots \tilde{\Delta}_{k_l}^{(\tilde{m}_l, l)}$, голоморфна в том же полицилиндре E .

Аналогично, действуя оператором $N^{(\tilde{\omega}^{(l)}; \omega^{(l)})}$ на $f(r_1 e^{i\varphi_1}, \dots, r_n e^{i\varphi_n})$ как на функцию r_l , $l = 1, 2, \dots, n$ (в этом случае этот оператор обозначим через $N_l^{(\tilde{\omega}^{(l)}; \omega^{(l)})}$), будем иметь, что функция

$$N_l^{(\tilde{\omega}^{(l)}; \omega^{(l)})}[f(r_1 e^{i\varphi_1}, \dots, r_n e^{i\varphi_n})] = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_{k_l}^{(\tilde{m}_l)}}{\lambda_{k_l}^{(m_l)}} a_{k_1, \dots, k_n} (r_1 e^{i\varphi_1})^{k_1} \dots (r_n e^{i\varphi_n})^{k_n}$$

голоморфна в полицилиндре E .

Введем операторы X, Y :

$$X[f(r_1 e^{i\varphi_1}, \dots, r_n e^{i\varphi_n})] =$$

$$= N_n^{(\omega^{(n)}; \tilde{\omega}^{(n)})}[N_{n-1}^{(\omega^{(n-1)}; \tilde{\omega}^{(n-1)})} \dots [N_1^{(\omega^{(1)}; \tilde{\omega}^{(1)})}[f(r_1 e^{i\varphi_1}, \dots, r_n e^{i\varphi_n})] \dots],$$

$$* \overline{(\omega^{(l)}, \tilde{\omega}^{(l)})} = (\omega_1^{(l)}, \omega_{m_l}^{(l)}; \omega_1^{(l)}, \dots, \tilde{\omega}_{\tilde{m}_l}^{(l)}).$$

$$Y[f(r_1 e^{i\varphi_1}, \dots, r_n e^{i\varphi_n})] = \\ = N_n(\widetilde{\omega}^{(n)}; \omega^{(n)}) [N_{n-1}(\widetilde{\omega}^{(n-1)}; \omega^{(n-1)}) \dots [N_1(\widetilde{\omega}^{(1)}; \omega^{(1)}) [f(r_1 e^{i\varphi_1}, \dots, r_n e^{i\varphi_n})] \dots]].$$

Нетрудно видеть, что функции $X[f(r_1 e^{i\varphi_1}, \dots, r_n e^{i\varphi_n})]$ и $Y[f(r_1 e^{i\varphi_1}, \dots, r_n e^{i\varphi_n})]$ голоморфны в полицилиндре E , причем

$$X[f(r_1 e^{i\varphi_1}, \dots, r_n e^{i\varphi_n})] = \\ = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{k_1}^{(m_1)} \dots \lambda_{k_n}^{(m_n)}}{\widetilde{\lambda}_{k_1}^{(\widetilde{m}_1)} \dots \widetilde{\lambda}_{k_n}^{(\widetilde{m}_n)}} a_{k_1, \dots, k_n} (r_1 e^{i\varphi_1})^{k_1} \dots (r_n e^{i\varphi_n})^{k_n}, \quad (3)$$

$$Y[f(r_1 e^{i\varphi_1}, \dots, r_n e^{i\varphi_n})] = \\ = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} \frac{\widetilde{\lambda}_{k_1}^{(\widetilde{m}_1)} \dots \widetilde{\lambda}_{k_n}^{(\widetilde{m}_n)}}{\lambda_{k_1}^{(m_1)} \dots \lambda_{k_n}^{(m_n)}} a_{k_1, \dots, k_n} (r_1 e^{i\varphi_1})^{k_1} \dots (r_n e^{i\varphi_n})^{k_n}. \quad (4)$$

Отсюда следует, что операторы X и Y взаимно обратны.

В дальнейшем для краткости записи обозначаем $z = (z_1, \dots, z_n)$, $\rho e^{i\theta} = (\rho_1 e^{i\theta_1}, \dots, \rho_n e^{i\theta_n})$, $E_\rho = \{|z_l| < \rho_l, l = 1, 2, \dots, n\}$, и пусть $z_l = r_l e^{i\varphi_l}$, $l = 1, 2, \dots, n$.

Используя интегральную формулу (1), получим, что для любых $\rho_1, \dots, \rho_n$, $0 < \rho_l < R_l$, $l = 1, 2, \dots, n$,

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} Y \left[\prod_{l=1}^n C \left(e^{-i\theta_l} \frac{r_l e^{i\varphi_l}}{\rho_l} \right) \right] X[f(\rho e^{i\theta})] d\theta_n. \quad (5)$$

Опираясь на разложения (3) и (4) ((4) применено к функции $\prod_{l=1}^n C \left(e^{-i\theta_l} \frac{r_l e^{i\varphi_l}}{\rho_l} \right)$), нетрудно установить, что для любых $\rho_1, \dots, \rho_n$, $0 < \rho_l < R_l$, $l = 1, 2, \dots, n$, имеет место формула

$$\overline{f(0)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} Y \left[\prod_{l=1}^n C \left(e^{-i\theta_l} \frac{r_l e^{i\varphi_l}}{\rho_l} \right) \right] \overline{X[f(\rho e^{i\theta})]} d\theta_n, \quad (6) \\ r_l < \rho_l, \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

Складывая формулы (5) и (6), получим

$$f(z) = -\overline{f(0)} + \frac{2}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} Y \left[\prod_{l=1}^n C \left(e^{-i\theta_l} \frac{r_l e^{i\varphi_l}}{\rho_l} \right) \right] \operatorname{Re} X[f(\rho e^{i\theta})] d\theta_n; \quad (7)$$

откуда, в частности, будем иметь

$$\operatorname{Re} f(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} X[f(\rho e^{i\theta})] d\theta_n. \quad (8)$$

Соотношения (7), (8) приводят к формуле

$$f(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \\ + \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2^{n-1}} Y \left[\prod_{l=1}^n \left(S \left(e^{-i\theta_l} \frac{r_l e^{i\varphi_l}}{\rho_l} \right) + 1 \right) \right] - 1 \right\} \operatorname{Re} X[f(\rho e^{i\theta})] d\theta_n, \quad (9)$$

где $S(w) = (1 + w) / (1 - w)$. Отсюда

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \dots \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2^{n-1}} \operatorname{Re} Y \left[\prod_{l=1}^n \left(S \left(e^{-i\theta_l} \frac{r_l}{\rho_l} e^{i\varphi_l} \right) + 1 \right) \right] - 1 \right\} \operatorname{Re} X[f(\rho e^{i\theta})] d\theta_n. \quad (10)$$

Таким образом, мы пришли к следующей теореме:

Теорема. Пусть функция (2) голоморфна в полицилиндре E ; тогда функции (3), (4) голоморфны в том же полицилиндре E , причем для любых $\rho_1, \dots, \rho_n$, $0 < \rho_l < R_l$, $l = 1, 2, \dots, n$, справедливы интегральные формулы (5), (9), (10).

Московский областной педагогический институт
им. Н. К. Крупской

Поступило
24 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. И. Баврин, ДАН, 194, № 2 (1970). ² М. М. Джрбашян, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, № 5, 1075 (1968). ³ И. И. Баврин, ДАН, 204, № 4 (1972).

