Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (117), 2019

УДК 514.765.1

Эквиаффинные связности на редуктивных несимметрических пространствах

Н.П. Можей

В работе исследуется задача описания эквиаффинных связностей на гладком многообразии. В общем случае эта проблема является довольно сложной, поэтому она рассматривается в более узком классе многообразий – в классе редуктивных однородных пространств. Такое пространство всегда допускает инвариантную связность. Целью данной работы является описание всех инвариантных эквиаффинных связностей на трехмерных редуктивных несимметрических однородных пространствах вместе с их тензорами кручения и тензорами Риччи. Определены основные понятия: изотропно-точная пара, редуктивное и симметрическое пространство, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, тензор Риччи, эквиаффинная (локально эквиаффинная) связность. Рассмотрены пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований. В статье для трехмерных редуктивных несимметрических однородных пространств определено, при каких условиях связность является эквиаффинной (локально эквиаффинной). Также выписаны в явном виде сами связности, их тензоры кручения, тензоры Риччи.
Ключевые слова: эквиаффинная связность, группа преобразований, тензор Риччи, редуктивное пространство, симметрическое пространство, тензор кручения.

The question of description of equiaffine connections on a smooth manifold is studied. In general, the purpose of the research is quite complicated, therefore, it is considered in a narrower class of manifolds – in the class of reductive homogeneous spaces. Such a space always admits an invariant connection. The purpose of the work is the description of all invariant equiaffine connections on three-dimensional reductive nonsymmetric homogeneous spaces together with their torsion tensors and Ricci tensors. The basic notions, such as isotropically-faithful pair, reductive and symmetric space, affine connection, curvature and torsion tensors, Ricci tensor, equiaffine (locally equiaffine) connection are defined. We considered the case of the unsolvable Lie group of transformations. In the article for three-dimensional reductive nonsymmetric homogeneous spaces, it is determined under what conditions a connection is equiaffine (locally equiaffine). In addition, the connections, their torsion tensors and Ricci tensors are written out in explicit form.
Keywords: equiaffine connection, transformation group, Ricci tensor, reductive space, symmetric space, torsion tensor.

Введение. Цель работы – описать все эквиаффинные связности на редуктивных несимметрических однородных пространствах размерности 3. Случай аффинных связностей рассматривался в работе [1]. Аффинная связность является эквиаффинной, если допускает параллельную форму объема (см. [2]). Для трехмерных редуктивных несимметрических однородных пространств определим, при каких условиях связность является эквиаффинной (локально эквиаффинной), также выпишем в явном виде сами связности, их тензоры кручения и тензоры Риччи.

В работе исследуется класс однородных пространств аффинной связности с кручением, получивших название «редуктивных», у которых при параллельном переносе сохраняются как тензор кривизны, так и тензор кручения, введенный в рассмотрение П.К. Рашевским [3]. Этот класс интересен, например, тем, что все геодезические на редуктивных пространствах являются однородными. Симметрические пространства – это пространства аффинной связности без кручения, при параллельном переносе у которых сохраняется тензор кривизны. Инвариантные связности на редуктивных однородных пространствах независимо изучались П.К. Рашевским, М. Куритой, Э.Б. Винбергом, Ш. Кобаяси, К. Номидзу и др. Сами редуктивные несимметрические однородные пространства описывались в работе [1], в данной работе изучаются эквиаффинные (локально эквиаффинные) связности на таких пространствах, найдены также тензоры кручения и тензоры Риччи.

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств (M, $\bar{G}$) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли ($\bar{G}$, G) (см., например, [4, с. 89–91]). Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ –

алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Пространство $\bar{G}/G$ *редуктивно*, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathrm{ad}(G)$-инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}$, $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{m}=0$; $\mathrm{ad}(G)\mathfrak{m}\subset\mathfrak{m}$ (второе условие влечет $[\mathfrak{g},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна). Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m}=\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. *Симметрическое* пространство есть тройка $(\bar{G}, G, \sigma)$, где σ – инволютивный автоморфизм, такой, что $\sigma(g) = s_o g s_o^{-1}$, $g\in\bar{G}$, s_o – симметрия M, o – неподвижная точка s_o. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$ – симметрическая алгебра Ли. Поскольку σ инволютивно, его собственными значениями являются 1 и –1, $\mathfrak{g}$ – собственное подпространство для 1. Пусть $\mathfrak{m}$ – собственное подпространство для –1, $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}+\mathfrak{m}$, тогда $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{g}$. Если первых два условия выполняются, а последнее условие нет, то соответствующее однородное пространство является редуктивным, но не является симметрическим.

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, инвариантные аффинные связности на $(M,\bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии со связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [5, т. 2, с. 177–179]. Если $\bar{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность. *Тензор кручения* $T\in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и *тензор кривизны* $R\in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид: $T(x_{\mathfrak{m}},y_{\mathfrak{m}})=\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}}-\Lambda(y)x_{\mathfrak{m}}-[x,y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}},y_{\mathfrak{m}})=[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])$ для всех $x,y\in\bar{\mathfrak{g}}$. Будем говорить, что Λ имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если $T=0$. В этом случае имеет место первое тождество Бьянки:

$$R(x,y)z+R(y,z)x+R(z,x)y=0 \qquad \forall x,y,z\in\mathfrak{m}.$$

Определим тензор Риччи $Ric\in Inv\mathrm{T}_2(\mathfrak{m})$:

$$Ric(y,z)=\mathrm{tr}\{x\mapsto R(x,y)z\}.$$

Будем говорить, что аффинная связность Λ является *локально эквиаффинной*, если $\mathrm{tr}\Lambda([x,y])=0$ для всех $x,y\in\bar{\mathfrak{g}}$ (то есть $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}},\bar{\mathfrak{g}}])\subset\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$).

Аффинная связность Λ с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиаффинна. Действительно, по определению,

$$Ric(y,z)-Ric(z,y)=\mathrm{tr}\{x\mapsto R(x,y)z-R(x,z)y\}.$$

С учетом первого тождества Бьянки получаем

$$Ric(y,z)-Ric(z,y)=\mathrm{tr}\{x\mapsto -R(y,z)x\}=-\mathrm{tr}R(y,z).$$

Поскольку $\mathrm{tr}(AB-BA)=0$, имеем

$$Ric(y,z)-Ric(z,y)=-\mathrm{tr}(\Lambda(y)\Lambda(z)-\Lambda(z)\Lambda(y))+\mathrm{tr}\Lambda([y,z])=\mathrm{tr}\Lambda([y,z]).$$

Следовательно, тензор Ric симметрический тогда и только тогда, когда $\mathrm{tr}\Lambda([y,z])=0$ для всех $y,z\in\bar{\mathfrak{g}}$.

Под *эквиаффинной* связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\mathrm{tr}\Lambda(x)=0$ для всех $x\in\bar{\mathfrak{g}}$. В этом случае очевидно, что $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}})\in\mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Описание эквиаффинных связностей на редуктивных несимметрических однородных пространствах. Определим пару $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ таблицей умножения алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1,\dots,e_n,u_1,u_2,u_3\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ $(n=\dim\mathfrak{g})$, причем алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается $e_1,\dots,e_n$, а $\{u_1,u_2,u_3\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [1], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathrm{P})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$; α – параметр, если на него накладываются дополнительные условия, то они выписаны сразу после таблицы умножения, в противном случае предполагается, что параметр пробегает все $\mathbb{R}$.

Теорема [1]. *Трехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства* $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$, *такие, что* $\bar{\mathfrak{g}}$ *не является разрешимой* ($\mathfrak{g}\neq\{0\}$), *имеют вид:*

– $\mathfrak{g}$ *разрешима:*

1.1.7.	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	u_1	$-u_2$	0
u_1	$-u_1$	0	e_1+u_3	0
u_2	u_2	$-e_1-u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0

1.3.3	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	e_1+u_3	0
u_2	$-u_1$	$-e_1-u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0

1.8.2.	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2
u_1	0	0	u_1	u_2
u_2	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

1.3.4	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	$-e_1+u_3$	0
u_2	$-u_1$	e_1-u_3	0	0
u_3	0	0	0	0

2.21.4.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	u_1	u_2
u_2	0	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
u_3	u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

– $\mathfrak{g}$ *не является разрешимой:*

3.3.2.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_2	0	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	u_3	0
u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0	0	0

3.3.3.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	u_2	0	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	u_1
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	u_2
u_3	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	0

4.2.2.	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	0	$(1/2)u_1$	$(1/2)u_2$	u_3
e_2	0	0	$2e_3$	$-2e_4$	u_1	$-u_2$	0
e_3	0	$-2e_3$	0	e_2	0	u_1	0
e_4	0	$2e_4$	$-e_2$	0	u_2	0	0
u_1	$-(1/2)u_1$	$-u_1$	0	$-u_2$	0	u_3	0
u_2	$-(1/2)u_2$	u_2	$-u_1$	0	$-u_3$	0	0
u_3	$-u_3$	0	0	0	0	0	0

5.2.2.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	u_2	0	0
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0	e_4+u_1
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0	e_5+u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	αu_1
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0	0	αu_2
u_3	0	0	0	$-e_4-u_1$	$-e_5-u_2$	$-\alpha u_1$	$-\alpha u_2$	0

, $|\alpha|\leq 1$, $\alpha\neq -1$

5.2.3.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	u_2	0	0
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0	$u_1+\alpha e_4$
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0	$u_2+\alpha e_5$
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	αu_1-e_4
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0	0	αu_2-e_5
u_3	0	0	0	$-u_1-\alpha e_4$	$-u_2-\alpha e_5$	$-\alpha u_1+e_4$	$-\alpha u_2+e_5$	0

, $\alpha\neq 0$

Доказательство этой теоремы приведено в работе [1].

Будем описывать аффинную связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R через $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$, а тензор кручения T через $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$. Информация о тензорах кручения и тензорах Риччи приведена в доказательстве теоремы 2.

Теорема 2. *Пусть* $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ *– трехмерное редуктивное несимметрическое однородное пространство (приведенное в теореме 1). Локально эквиаффинные связности (при* $p_{i,j},q_{i,j},r_{i,j}\in\mathrm{R}$, $i,j=1,2,3$*) имеют следующий вид:*

Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$	Локально эквиаффинная связность (без кручения)
1.1.7	$\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}\\0&0&0\\0&p_{3,2}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&q_{2,3}\\p_{3,2}-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p_{1,3}&0&0\\0&q_{2,3}&0\\0&0&-p_{1,3}-q_{2,3}\end{pmatrix}$
1.3.3, 1.3.4	$\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}\\0&0&p_{2,3}\\p_{3,1}&1/2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&-p_{2,3}\\0&0&p_{1,3}\\-1/2&p_{3,1}&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p_{1,3}&-p_{2,3}&0\\p_{2,3}&p_{1,3}&0\\0&0&-2p_{1,3}\end{pmatrix}$
1.8.2	$\begin{pmatrix}0&1/2&p_{1,3}\\0&0&1/2\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2&-4p_{1,3}/3&q_{1,3}\\0&0&-p_{1,3}/3\\0&0&1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p_{1,3}&q_{1,3}&r_{1,3}\\-1/2&-p_{1,3}/3&2q_{1,3}\\0&-1/2&-2p_{1,3}/3\end{pmatrix}$
2.21.4	$\begin{pmatrix}0&1/2&0\\0&0&1/2\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2&0&0\\0&0&0\\0&0&1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\-1/2&0&0\\0&-1/2&0\end{pmatrix}$
3.3.2	$\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}\\0&0&0\\0&1/2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&p_{1,3}\\-1/2&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p_{1,3}&0&0\\0&p_{1,3}&0\\0&0&-2p_{1,3}\end{pmatrix}$
3.3.3	$\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&p_{1,3}\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p_{1,3}-1&0&0\\0&p_{1,3}-1&0\\0&0&r_{3,3}\end{pmatrix}$
4.2.2	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1/2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1/2&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
5.2.2	$\begin{pmatrix}0&0&q_{2,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&q_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}q_{2,3}-\alpha&0&0\\0&q_{2,3}-\alpha&0\\0&0&2q_{2,3}-\alpha+1\end{pmatrix}$
5.2.3	$\begin{pmatrix}0&0&q_{2,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&q_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}q_{2,3}-\alpha&0&0\\0&q_{2,3}-\alpha&0\\0&0&2q_{2,3}\end{pmatrix}$

Эквиаффинные связности имеют вид:

Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$	Эквиаффинная связность (без кручения)
1.1.7	Совпадает с локально эквиаффинной связностью
1.3.3, 1.3.4	Совпадает с локально эквиаффинной связностью
1.8.2	Совпадает с локально эквиаффинной связностью
2.21.4	Совпадает с локально эквиаффинной связностью
3.3.2	Совпадает с локально эквиаффинной связностью
3.3.3	$\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&p_{1,3}\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p_{1,3}-1&0&0\\0&p_{1,3}-1&0\\0&0&2-2p_{1,3}\end{pmatrix}$
4.2.2	не допускает эквиаффинной связности

Окончание

5.2.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & (3\alpha-1)/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (3\alpha-1)/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(\alpha+1)/4 & 0 & 0 \\ 0 & -(\alpha+1)/4 & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha+1)/2 \end{pmatrix}$
5.2.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha/2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

Доказательство. Определяем, при каких значениях параметров $\mathrm{tr}\Lambda([x,y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ (соответственно, $\mathrm{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$), $T = 0$ (Λ является связностью без кручения), проверяем, когда тензор Риччи является симметрическим. Для получения указанного результата обратим внимание, что аффинная связность имеет вид:

Пара	Аффинная связность
1.1.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
1.3.3, 1.3.4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 \\ -r_{1,2} & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
1.8.2	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & q_{1,2}+p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ -p_{1,2} & r_{1,1}+q_{1,2} & r_{1,2}+q_{1,3} \\ 0 & -p_{1,2} & r_{1,1}+2q_{1,2}+p_{1,3} \end{pmatrix}$
2.21.4	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
3.3.2, 3.3.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
4.2.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5.2.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1}+q_{2,3}+1 \end{pmatrix}$
5.2.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1}+q_{2,3}+\alpha \end{pmatrix}$

а тензор кручения:

Пара	Тензор кручения
1.1.7	$0, 0, p_{3,2} - q_{3,1} - 1 \;,\; p_{1,3} - r_{1,1}, 0, 0 \;,\; 0, q_{2,3} - r_{2,2}, 0$
1.3.3	$0, 0, 2p_{3,2} - 1 \;,\; p_{1,3} - r_{1,1}, p_{2,3} + r_{1,2}, 0 \;,\; -p_{2,3} - r_{1,2}, p_{1,3} - r_{1,1}, 0$
1.3.4	$0, 0, 2p_{3,2} - 1 \;,\; p_{1,3} - r_{1,1}, p_{2,3} + r_{1,2}, 0 \;,\; -p_{2,3} - r_{1,2}, p_{1,3} - r_{1,1}, 0$
1.8.2	$2p_{1,2} - 1, 0, 0 \;,\; p_{1,3} - r_{1,1}, 2p_{1,2} - 1, 0 \;,\; q_{1,3} - r_{1,2}, p_{1,3} - r_{1,1}, 2p_{1,2} - 1$
2.21.4	$2p_{1,2} - 1, 0, 0 \;,\; 0, 2p_{1,2} - 1, 0 \;,\; 0, 0, 2p_{1,2} - 1$

Окончание

3.3.2	$0,0,2p_{3,2}-1\ ,\ p_{1,3}-r_{1,1},0,0\ ,\ 0,p_{1,3}-r_{1,1},0$
3.3.3	$0,0,2p_{3,2}\ ,\ p_{1,3}-r_{1,1}-1,0,0\ ,\ 0,p_{1,3}-r_{1,1}-1,0$
4.2.2	$0,0,2p_{3,2}-1\ ,(0,0,0),(0,0,0)$
5.2.2	$(0,0,0),\ q_{2,3}-r_{1,1}-\alpha,0,0\ ,\ 0,q_{2,3}-r_{1,1}-\alpha,0$
5.2.3	$(0,0,0),\ q_{2,3}-r_{1,1}-\alpha,0,0\ ,\ 0,q_{2,3}-r_{1,1}-\alpha,0$

Тензор Риччи в случае 1.1.7 имеет вид

$$Ric=\begin{pmatrix} 0 & p_{3,2}q_{2,3}-1+r_{2,2}-p_{3,2}r_{2,2}+r_{3,3}p_{3,2} & 0 \\ p_{1,3}q_{3,1}-1-r_{1,1}-q_{3,1}r_{1,1}+r_{3,3}q_{3,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}+q_{2,3}r_{3,3}-r_{2,2}q_{2,3} \end{pmatrix}$$

и является симметрическим при $p_{1,3}q_{3,1}-r_{1,1}-q_{3,1}r_{1,1}+r_{3,3}q_{3,1}=p_{3,2}q_{2,3}+r_{2,2}-p_{3,2}r_{2,2}+r_{3,3}p_{3,2}$. В случаях 1.3.3 и 1.3.4 тензор Риччи является симметрическим при $p_{13}p_{32}-p_{23}p_{31}+r_{11}-p_{31}r_{12}-p_{32}r_{11}+r_{33}p_{32}=0$, а в случае 1.8.2 – при $2p_{13}p_{12}-q_{12}p_{12}+r_{11}+2q_{12}=0$. В случае 3.3.2 тензор Риччи симметрический при $p_{13}p_{32}+r_{11}-p_{32}r_{11}+r_{33}p_{32}=0$, а в случае 3.3.3 – при $p_{13}p_{32}-p_{32}r_{11}+r_{33}p_{32}+p_{32}=0$. В случае 2.21.4 тензор Риччи имеет вид

$$Ric=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2p_{12}^{\ 2}+2p_{12} \\ 0 & 2p_{12}^{\ 2}-2p_{12} & 0 \\ -2p_{12}^{\ 2}+2p_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и является симметрическим, в случае 4.2.2 тензор Риччи нулевой, в случае 5.2.2 тензор Риччи примет вид

$$Ric=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2q_{23}^{\ 2}+2q_{23}-2\alpha q_{23} \end{pmatrix},$$

а в случае 5.2.3 – вид

$$Ric=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2q_{23}^{\ 2}+2 \end{pmatrix}.$$

Пусть, например, $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ – трехмерное однородное пространство 5.2.2 (либо 5.2.3), тогда инвариантная аффинная связность и тензор кручения имеют вид, приведенный в таблицах, тензор Риччи является симметрическим, то есть связность является эквиаффинной при $3r_{1,1}+q_{2,3}+1=0$ в случае 5.2.2, при $3r_{1,1}+q_{2,3}+\alpha=0$ в случае 5.2.3 ($\mathrm{tr}\Lambda(x)=0$, $x\in\bar{\mathfrak{g}}$) и $r_{1,1}=q_{2,3}-\alpha$ ($T=0$). Имеем также $\mathrm{tr}\Lambda([x,y])=0$ для всех $x,y\in\bar{\mathfrak{g}}$, т. е. связность является локально эквиаффинной. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Прямыми вычислениями получаем, что локально эквиаффинные (эквиаффинные) связности имеют вид, приведенный в теореме.

Заключение. Таким образом, для всех трехмерных редуктивных несимметрических однородных пространств с неразрешимой группой преобразований определено, при каких условиях связность является эквиаффинной (локально эквиаффинной); найдены в явном виде сами связности, тензоры кручения и тензоры Риччи. Полученные результаты могут найти приложение в общей теории относительности (которая, с математической точки зрения, базируется на геометрии искривленных пространств), в ядерной физике и физике элементарных частиц (поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах), а также при конструировании математических моделей реальных процессов.

Литература

1. Можей, Н.П. Трехмерные редуктивные несимметрические однородные пространства / Н.П. Можей // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2017. – № 3 (102). – С. 141–148.

2. Nomizu, K. Affine differential geometry / K. Nomizu, T. Sasaki. – Great Britain : Cambridge Univ. Press, 1994. – 263 p.

3. Рашевский, П.К. Симметрические пространства аффинной связности с кручением / П.К. Рашевский // Труды семин. по векторн. и тенз. анализу. – 1969. – № 8. – С. 82–92.

4. Онищик, А.Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А.Л. Онищик. – М. : Физ.-мат. лит., 1995. – 384 с.

5. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2-х т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 2. – 416 с.

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Поступила в редакцию 23.10.2019