Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (117), 2019

УДК 517.538.5+517.538.6

Критерий единственности и детерминантные представления многочленов Эрмита-Паде первого рода

А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко

В работе введены новые понятия: вполне нормальный индекс и вполне совершенная система функций. С помощью этих понятий доказан критерий единственности решения задачи Эрмита-Паде, получены явные детерминантные представления многочленов Эрмита-Паде 1-го рода для произвольной системы степенных рядов. Полученные результаты дополняют хорошо известные результаты в теории аппроксимаций Эрмита-Паде.
Ключевые слова: задача Эрмита-Паде, многочлены Эрмита-Паде, нормальный индекс, совершенная система функций, определители Ганкеля.

New concepts are introduced in the work.They are quite normal index and a quite perfect system of functions. Using these concepts, the criterion for the uniqueness of the solution of the Hermite-Pade problem is proved, explicit determinant representations of type I Hermite-Padé polynomials for an arbitrary system of power series were obtained. The results obtained complement and generalize the well-known result in the theory of Hermite-Padé approximations.
Keywords: Hermite-Padé polynomials, normal index, perfect system, Hadamard determinant, Hankel determinant.

1. Введение. Постановка задачи. Для произвольного фиксированного натурального числа k рассмотрим набор $f=(f_1,\dots,f_k)$ степенных рядов

$$f_j(z)=\sum_{i=0}^{\infty} f_i^{\,j} z^i,\ j=1,2\dots,k \tag{1.1}$$

с комплексными коэффициентами. Множество k-мерных мультииндексов (индексов), т. е. упорядоченных k натуральных чисел, обозначим N^k. Порядок индекса $n=(n_1,\dots,n_k)$ это сумма $|n|:=n_1+\dots+n_k$. Зафиксируем индекс $n\in\mathrm{N}^k$, и рассмотрим следующую задачу Эрмита-Паде (см. [1; гл. 4, § 1], [2]–[4]).

Задача ЭП. *Для* f *и индекса* n *найти такой набор неравных тождественно нулю одновременно многочленов* $A_1=A_n^1,\dots,A_k=A_n^k$, *что* $\deg A_1\le n_1-1,\dots,\deg A_k\le n_k-1$ *и*

$$L_n(z):=\sum_{j=1}^{k} A_j(z)\, f_j(z)=c_n z^{|n|-1}+\dots\ . \tag{1.2}$$

В случае, когда $f=(f_1,1)$ решение поставленной задачи получено Паде, который нашел явный вид многочленов A_1, A_2 (их называют многочленами Паде). Например, если положить $n_1=m+1,\ n_2=n+1$, то [2, гл. 4, § 1.1, теорема 1.1.1]

$$A_1(z)=\begin{vmatrix} f_{n-m+1}^1 & f_{n-m+2}^1 & \dots & f_n^1 & f_{n+1}^1 \\ f_{n-m+2}^1 & f_{n-m+3}^1 & \dots & f_{n+1}^1 & f_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ f_n^1 & f_{n+1}^1 & \dots & f_{n+m-1}^1 & f_{n+m}^1 \\ z^m & z^{m-1} & \dots & z & 1 \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

Здесь и далее при $i<0$ считаем, что $f_i^{\,j}=0$.

Если f состоит из набора экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j – различные комплексные числа, то решения поставленной задачи в явном виде были найдены Эрмитом в его известной работе [4], посвященной доказательству трансцендентности числа e. В этом случае искомые многочлены были представлены Эрмитом в виде интегралов Коши.

Хорошо известно (см. [1, гл. 4, § 1]), что решение задачи Эрмита-Паде существует, но не единственно. В частности многочлены A_j находятся с точностью до мультипликативного множителя: если набор $A=(A_1,\ldots,A_k)$ удовлетворяет необходимым условиям, то для любого отличного от нуля комплексного числа λ набор $\lambda A=(\lambda A_1,\ldots,\lambda A_k)$ также удовлетворяет условиям задачи. Эта неединственность может быть и более существенной.

Пример 1.1. *Пусть* $k=1$, $n=(3,3)$, *а*

$$f(z)=\frac{1}{2-4z}=\frac{1}{2}+z+2z^2+4z^3+8z^4+\ldots .$$

Тогда любое решение задачи ЭП представимо в виде: $(\lambda A_1,\lambda A_2)$, $\lambda\in \mathrm{C}$, $\lambda\neq 0$,

$$A_1(z)=a+bz-(4a+2b)z^2,\ \ A_2(z)=\frac{1}{2}a+(a+\frac{1}{2}b)z,$$

где a,b *произвольные действительные числа, неравные нулю одновременно.*

Принято говорить [1], что задача Эрмита-Паде имеет единственное решение, если все решения задачи можно записать в виде: λA, где $\lambda\in \mathrm{C}$, $\lambda\neq 0$, а $A=(A_1,\ldots,A_k)$ – некоторое фиксированное решение.

Определение 1.1. *Если* $A=(A_1,\ldots,A_k)$ *– решение задачи ЭП с индексом* $n\in \mathrm{N}^k$, *то многочлены* $A_1,\ldots,A_k$ *называют многочлены Эрмита-Паде 1 рода (Latin Type) для набора (системы)* f *степенных рядов (1.1).*

Центральными понятиями в теории таких многочленов являются понятия нормального индекса и совершенной системы [1, гл. 4, § 1].

Определение 1.2. *Индекс* $n\in \mathrm{N}^k$ *называется нормальным для* f, *если для любого решения задачи ЭП с индексом* n

$$\deg A_j = n_j-1,\ j=1,\ldots,k.$$

Определение 1.3. *Система* f *называется совершенной, если все индексы* $n\in \mathrm{N}^k$ *являются нормальны для* f.

При $k=2$, $f=(f_1,1)$ критерий нормальности индекса $(n_1,n_2):=(m+1,n+1)$ выражается условием [4]:

$$H_{n+1,\,m}\cdot H_{n,\,m+1}\neq 0, \tag{1.4}$$

где определители Адамара $H_{n,m}$ определяются равенствами

$$H_{n,m}=\begin{vmatrix} f^1_{n-m+1} & f^1_{n-m+2} & \cdots & f^1_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^1_n & f^1_{n+1} & \cdots & f^1_{n+m-1}\end{vmatrix}.$$

Известно, что если индекс n нормальный для f, то задача ЭП имеет единственное решение. Следующий пример показывает, что уже при $k=2$ нормальность индекса n не является необходимым условием единственности решения поставленной задачи.

Пример 1.2. *Пусть* $k=2$, $n=(3,3)$, $f=(f_1,1)$, *а*

$$f_1(z)=\frac{1}{2-z}+\frac{1}{4}z=\frac{1}{2}+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{8}+\frac{z^3}{16}+\frac{z^4}{32}+\ldots .$$

Тогда любое решение задачи ЭП можно записать в виде: $(\lambda A_1,\lambda A_2)$, $\lambda\in$ □, $\lambda\neq 0$, *где*

$$A_1(z)=8-4z,\ A_2(z)=-4-2z+z^2 .$$

При этом индекс $n=(3,3)$ *не является нормальным, так как* $\deg A_1=1$.

Нашей целью является нахождение необходимых и достаточных условий на индекс n и систему f, определенную равенством (1.1), при которых решение задачи ЭП является единственным.

2. Основные определения и обозначения. Набор $f = (f_1, \dots, f_k)$ может состоять, вообще говоря, из формальных степенных рядов. Уже по этой причине поставленная задача является чисто алгебраической и, следовательно, имеет алгебраическое решение. В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что радиусы сходимости всех рядов (1.1) не равны нулю.

Введем необходимые обозначения. Для фиксированного мультииндекса $n = (n_1, ..., n_k)$ и $j = 1, ..., k$ определим матрицы-столбцы порядка $(|n|-1)\times 1$

$$F_i^j = \left(f_{1-i}^j \quad f_{2-i}^j \quad \dots \quad f_{|n|-i-1}^j \right)^T, \ i = 1,...,n_j ,$$

и матрицы порядка $(|n|-1)\times n_j$

$$F^j = \left(F_1^j \quad F_2^j \quad \dots \quad F_{n_j}^j \right),$$

где C^T является матрицей, транспонированной к матрице C. Далее рассмотрим матрицу порядка $(|n|-1)\times |n|$

$$F_n = \left(F^1 \quad F^2 \quad \dots \quad F^k \right)$$

и функциональные матрицы-строки порядка $1\times |n|$

$$E_1(z) = \left(1 \quad z \quad \dots \quad z^{n_1-1} \quad 0\, 0 \dots 0 \quad \dots \quad 0\, 0 \dots 0 \right),$$

$$E_2(z) = \left(0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad z \quad \dots \quad z^{n_2-1} \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right),$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$E_k(z) = \left(0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 1 \quad z \quad \dots \quad z^{n_k-1} \right),$$

$$E(z) = E_1(z) + E_2(z) + \dots + E_k(z).$$

Если в матрице F_n добавить в качестве последней строки строку $E_j(z)$, то получим квадратную матрицу порядка $|n|\times|n|$. Определитель этой матрицы обозначим через $A_j(z)$. Тогда при $j = 1, 2, \dots, k$

$$A_j(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & f_0^j & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & f_0^k & \cdot\cdot & 0 \\ f_1^1 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & f_1^j & f_0^j & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & f_1^k & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ f_{n_j-1}^1 & \cdot\cdot & f_{n_j-n_1}^1 & \cdot\cdot & f_{n_j-1}^j & f_{n_j-2}^j & \cdot\cdot & f_0^j & \cdot\cdot & f_{n_j-1}^k & \cdot\cdot & f_{n_j-n_k}^k \\ f_{n_j}^1 & \cdot\cdot & f_{n_j-n_1+1}^1 & \cdot\cdot & f_{n_j}^j & f_{n_j-1}^j & \cdot\cdot & f_1^j & \cdot\cdot & f_{n_j}^k & \cdot\cdot & f_{n_j-n_k+1}^k \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ f_{|n|-2}^1 & \cdot\cdot & f_{|n|-n_1-1}^1 & \cdot\cdot & f_{|n|-2}^j & f_{|n|-3}^j & \cdot\cdot & f_{|n|-n_j-1}^j & \cdot\cdot & f_{|n|-2}^k & \cdot\cdot & f_{|n|-n_k-1}^k \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & 1 & z & \cdot\cdot & z^{n_j-1} & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & 0 \end{vmatrix}. \qquad (2.1)$$

Если в определителе (2.1) последнюю строку заменить матрицей-строкой

$$F_i^n = \left(f_{i+|n|-2}^1 \quad f_{i+|n|-3}^1 \quad \dots \quad f_{i+|n|-n_1-1}^1 \quad \dots \quad f_{i+|n|-2}^k \quad f_{i+|n|-3}^k \quad \dots \quad f_{i+|n|-n_k-1}^k \right),$$

то полученный определитель обозначим через $d_{n,i}$.

Определение 2.1. *Индекс* $n \in \mathrm{N}^k$ *назовем вполне нормальным для* f*, если ранг матрицы* F_n *равен* $|n|-1$.

В примере 1.1 индекс $n = (3,3)$ не является нормальным и не является вполне нормальным, а в примере 1.2 этот индекс не является нормальным, но является вполне нормальным для рассматриваемых в этих примерах систем функций.

Определение 2.2. *Систему* f *назовем вполне совершенной, если все индексы* $n \in \mathrm{N}^k$ *являются вполне нормальными для* f .

Далее будет показано, что любая совершенная система f является вполне совершенной. Из примера 1.2 следует, что обратное утверждение вообще говоря неверно.

3. Критерий единственности задачи Эрмита-Паде. Сформулируем и докажем основную теорему данной работы.

Теорема 1. *Для того, чтобы для заданного индекса* $n \in \mathrm{N}^k$ *задача Эрмита-Паде имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс* n *был вполне нормальным для* f *, т. е.* $rang\, F_n = |n|-1$.

В случае, если индекс n *является вполне нормальным, при определенном выборе мультипликативного множителя справедливы следующие детерминантные представления:*

$$A_j(z) := det\begin{bmatrix} F_n & E_j(z) \end{bmatrix}^T = det\begin{bmatrix} F_n \\ E_j(z) \end{bmatrix}, \; j = 1,...,k \; ; \tag{3.1}$$

$$L_n(z) = \sum_{i=1}^{\infty} d_{\,n,i}\, z^{i+|n|-2} . \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть

$$A_j(z) = b_0^j + b_1^j z + \ldots + b_{n_j-1}^j z^{n_j-1}, \; j = 1,\ldots,k .$$

Опираясь на равенство (1.2), запишем в матричной форме систему уравнений для определения коэффициентов многочлена $A_j(z)$:

$$F_n \times b^T = \theta^T \; , \tag{3.3}$$

где

$$b = (b_0^1\, b_1^1 \ldots b_{n_1-1}^1 \ldots b_0^k\, b_1^k \ldots b_{n_k-1}^k) \; -$$

матрица-строка порядка $1 \times |n|$, а θ – матрица-строка порядка $1 \times |n|$, все элементы которой равны нулю.

Система линейных уравнений (3.3) является однородной и в ней число неизвестных на единицу больше числа уравнений. Поэтому из теоремы Кронекера-Капелли следует, что система (3.3) имеет ненулевое решение, а множество всех линейно независимых решений этой системы состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда rang $F_n = |n|-1$. В этом случае все остальные ненулевые решения получаются домножением этого фундаментального решения на комплексное число $\lambda \neq 0$. Заметим, что если все коэффициенты рядов (1.1) действительные числа, то решения системы (3.3) также будут действительными числами. Первая часть теоремы 1 доказана.

Докажем теперь равенства (3.1), (3.2). Так как rang $F_n = |n|-1$, то при некотором $p \in \{1, 2, \ldots, |n|\}$ определитель, полученный из матрицы F_n, вычеркиванием в ней p-го столбца , отличен от нуля. Для определенности предположим, что $p = |n|$. Тогда систему (3.3) можно записать так:

$$\begin{pmatrix} f_0^1 & 0 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & f_0^k & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ f_1^1 & f_0^1 & \cdot\cdot & 0 & \cdot\cdot & f_1^k & f_0^k & \cdot\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ f_{n_k-1}^1 & f_{n_k-2}^1 & \cdot\cdot & f_{n_k-n_1}^1 & \cdot\cdot & f_{n_k-1}^k & f_{n_k-2}^k & \cdot\cdot & f_1^k \\ f_{n_k}^1 & f_{n_k-1}^1 & \cdot\cdot & f_{n_k-n_1+1}^1 & \cdot\cdot & f_{n_k}^k & f_{n_k-1}^k & \cdot\cdot & f_2^k \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ f_{|n|-3}^1 & f_{|n|-4}^1 & \cdot\cdot & f_{|n|-n_k-2}^1 & \cdot\cdot & f_{|n|-3}^k & f_{|n|-4}^k & \cdot\cdot & f_{|n|-n_k-1}^k \\ f_{|n|-2}^1 & f_{|n|-3}^1 & \cdot\cdot & f_{|n|-n_k-1}^1 & \cdot\cdot & f_{|n|-2}^k & f_{|n|-3}^k & \cdot\cdot & f_{|n|-n_k}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0^1 \\ \\ \vdots \\ b_{n_k-1}^1 \\ \vdots \\ b_0^k \\ \vdots \\ b_{n_k-2}^k \end{pmatrix} = -b_{n_k-1}^k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \vdots \\ f_0^k \\ f_1^k \\ \vdots \\ f_{|n|-n_k-1}^k \end{pmatrix} . \tag{3.4}$$

Обозначим главный определитель системы (3.4) через $H_n^{n_k}$. По нашему предположению $H_n^{n_k} \neq 0$. Если бы $b_{n_k-1}^k = 0$, то система (3.4) имела бы единственное нулевое решение. Тогда бы и система (3.3) имела только нулевое решение. Поэтому $b_{n_k-1}^k \neq 0$. Решая систему (3.4) по правилу Крамера, получим решение, которое символически можно записать в виде:

$$det\ F_n \quad E(z)^{\ T} = A_1(z) + \ldots + A_k(z)\ , \tag{3.5}$$

где $A_j(z)$ определяются равенствами (3.1), которые в развернутом виде совпадают с (2.1). В случае, если бы вместо $p = |n|$ вычеркивали столбец матрицы F_n с другим номером, рассуждая аналогичным образом, пришли бы к символической записи решения в виде (3.5).

Докажем, что многочлены $A_j(z)$, $j = 1,...,k$, определенные равенствами (2.1) и (3.1) действительно являются искомыми многочленами. Разложив определитель в (2.1) по элементам последней строки, получим, что $\deg A_j(z) \le n_j - 1$. Остается доказать выполнение условий (1.2). Заметим, что

$$L_n(z) = \sum_{j=1}^{k} A_j(z) f_j(z) =$$

$$= \begin{vmatrix} f_0^1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & f_0^k & 0 & \ldots & 0 \\ f_1^1 & f_0^1 & \ldots & 0 & \ldots & f_1^k & f_0^k & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{|n|-2}^1 & f_{|n|-3}^1 & \ldots & f_{|n|-n_1-1}^1 & \ldots & f_{|n|-2}^k & f_{|n|-3}^k & \ldots & f_{|n|-n_k-1}^k \\ \sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i^{\,j} z^i & \sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i^{\,j} z^{i+1} & \ldots & \sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i^{\,j} z^{i+n_1-1} & \ldots & \sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i^{\,j} z^i & \sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i^{\,j} z^{i+1} & \ldots & \sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i^{\,j} z^{i+n_k-1} \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе из последней строки вычтем: первую строку, умноженную на 1, вторую строку, умноженную на z, и так далее вплоть до предпоследней строки, умноженной на $z^{|n|-2}$. Тогда

$$L_n(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & f_0^k & \ldots & 0 \\ f_1^1 & f_0^1 & \ldots & 0 & \ldots & f_1^k & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{|n|-2}^1 & f_{|n|-3}^1 & \ldots & f_{|n|-n_1-1}^1 & \ldots & f_{|n|-2}^k & \ldots & f_{|n|+n_k+1}^k \\ \sum\limits_{i=|n|-1}^{\infty} f_i^1 z^i & \sum\limits_{i=|n|-1}^{\infty} f_{i-1}^1 z^i & \ldots & \sum\limits_{i=|n|-1}^{\infty} f_{i-n_1+1}^1 z^i & \ldots & \sum\limits_{i=|n|-1}^{\infty} f_i^k z^i & \ldots & \sum\limits_{i=|n|-1}^{\infty} f_{i-n_k+1}^k z^i \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{n,i}}{z^{i+|n|-2}}\ .$$

При преобразованиях воспользовались определением суммы степенного ряда и правилом сложения определителей. Равенство (3.2) и теорема 1 доказаны.

Заметим, что если хотя бы один ряд в (1.1) является формальным, то и ряд (3.2) является формальным.

4. Замечание и некоторые следствия. Если индекс $n = (n_1,...,n_k) \in \mathrm{N}^k$ является вполне нормальным, то его n_j-ая компонента определяет число коэффициентов ряда f_j, которое учитывается при построении многочленов A_j и функции L_n.

Все предыдущие утверждения также остаются в силе, если некоторые компоненты индекса n равны нулю. Пусть, например, $n_j = 0$. В этом случае в матрице F_n отсутствует блок $F^{\,j}$ и, следовательно, при построении многочленов A_j (см. равенства (3.1)) коэффициенты ряда f_j не учитываются, а порядок мультииндекса n определяется остальными ненулевыми компонентами.

В частности, если $n=(n_1,n_2,0,...,0)$, то при построении многочленов $(A_j)_{j=1}^k$ учитываются только коэффициенты рядов f_1,f_2, и если $f_2(z)\equiv 1$, то, например, многочлен A_1 согласно равенству (3.1) с точностью до мультипликативного множителя представим в виде:

$$A_1(z)=\begin{vmatrix} f^1_{n_2} & f^1_{n_2-1} & \dots & f^1_{n_2-n_1+1} \\ f^1_{n_2+1} & f^1_{n_2} & \dots & f^1_{n_2-n_1+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^1_{n_2+n_1-2} & f^1_{n_2+n_1-3} & \dots & f^1_{n_2-1} \\ 1 & z^2 & \dots & z^{n_1-1} \end{vmatrix}.$$

Это полностью согласуется с равенством (1.3). В этом случае $A_j(z)\equiv 0$ при $j=3,...,k$. Если же $n=(n_1,0,...,0)$, то из (3.1) следует, что с точностью до мультипликативного множителя $A_1(z)=z^{n_1-1}$, $A_j(z)\equiv 0$ при $j=2,...,k$.

Заметим также, что если индекс n не является вполне нормальным, то многочлены A_j, определенные равенствами (3.1), не являются решениями задачи Эрмита-Паде, так как все они тождественно равны нулю. В частности, в примере 1.1 $A_1(z)=a+bz-(4a+2b)z^2$. Однако, если A_1 находится по формуле (3.1), то получим, что $A_1(z)\equiv 0$.

Из (3.1) вытекает критерий нормальности индекса $n=(n_1,...,n_k)\in \mathrm{N}^k$ для системы f при любых натуральных k.

Следствие 4.1. *Индекс n будет нормальным для f тогда и только тогда, когда*

$$\prod_{j=1}^{k} H_n^{n_j}\neq 0, \qquad (3.6)$$

где $H_n^{n_j}$ – определитель, полученный из определителя (2.1) вычеркиванием последней строки и столбца, в котором находится элемент z^{n_j-1}.

Нетрудно заметить, что если $f=(f_1,1)$ и $(n_1,n_2)=(n+1,m+1)$ то (3.6) равносильно $H_{n+1,m}\cdot H_{n,m+1}\neq 0$. Поэтому следствие 4.1 согласуется с критерием нормальности (1.4).

Литература

1. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М. : Наука, гл. ред. физ.-мат. лит.,1988. – 256 с.

2. Бейкер мл., Дж. Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М. : Мир, 1986. – 502 с.

3. Аптекарев, А.И. Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402). – С. 37–122.

4. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. – 1873. – V. 77. – P. 18–293.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 27.06.2019