

УДК 539.374

Свободные колебания трехслойной круговой пластины на инерционном основании при действии температуры

Д.В. ЛЕОНЕНКО

Рассмотрены свободные колебания трехслойной круглой пластины на упругом инерционном основании под действием температуры. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета принята гипотеза ломаной нормали. Заполнитель – легкий. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Для упругого инерционного основания принята гипотеза Винклера. Найдены аналитические решения соответствующих начально-краевых задач и проведен их численно-сравнительный анализ.

Ключевые слова: колебания, круговая пластина, температура, основание.

Free vibrations of a three-layer circular plate in an elastic inertial foundation under the action of temperature are considered. To describe the kinematics of the package, asymmetric across its thickness, the hypotheses of broken normal are assumed. The filler is light. The displacement continuity conditions are used on the boundaries of contact. The Winkler hypothesis is accepted for the elastic inertial foundation. Analytical solutions of the corresponding initial-boundary-value problems are found, and their numerical-comparative analysis is carried out.

Keywords: vibrations, circular plate, temperature, foundation.

1. Введение. Широкое применение трехслойных конструкций обуславливает необходимость разработки методов их расчета. Расчеты многослойных, в том числе трехслойных элементов конструкций, приведены в монографиях [1], [2]. В работах [3]–[5] рассмотрено деформирование трехслойных оболочек и стержней в температурном поле. Колебания круговой трехслойной пластины на безынерционном основании в изотермической постановке приведено в статье [6].

Здесь приводится постановка и решение краевой задачи о свободных колебаниях трехслойной круговой пластины, связанной с инерционным основанием, при действии температуры.

2. Постановка краевой задачи. Рассмотрим свободные симметричные колебания сплошных несимметричных по толщине упругих трехслойных пластин круговой формы с легким заполнителем, скрепленных с упругим инерционным основанием. Тонкие наружные слои являются несущими, они выполнены из достаточно прочного материала. Менее прочный легкий заполнитель большой толщины разносит несущие слои на заданное расстояние по высоте пластины и обеспечивает совместную работу несущих слоев. В отличие от жесткого заполнителя, легкий заполнитель не работает в тангенциальном направлении.

Выполним постановку задачи с использованием гипотез, введенных в [2] для трехслойных круговых пластин, не связанных с упругим основанием. Решение задачи проведем в цилиндрической системе координат r, φ, z . За координатную примем срединную плоскость заполнителя, ось z направим перпендикулярно вверх, к слою 1. Несущий слой, расположенный со стороны положительного направления оси z , считается слоем 1, следующий несущий слой – слоем 2, а заполнитель – слоем 3 (рисунок 1).

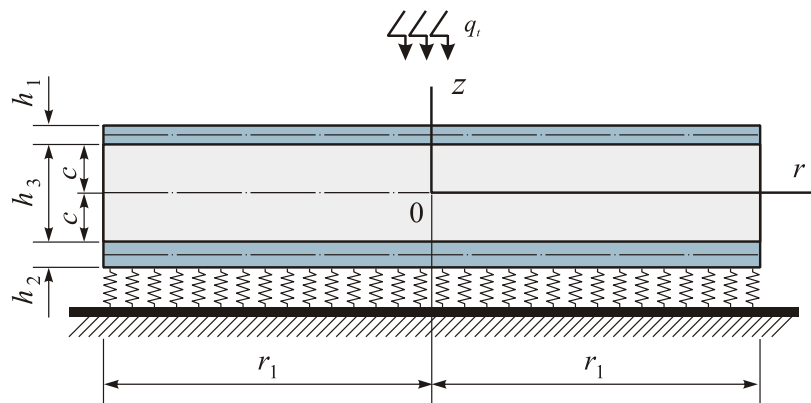


Рисунок 1 – Расчетная схема пластины

Для тонких внешних несущих слоев толщиной $h_1 \neq h_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого легкого заполнителя ($h_3 = 2c$) справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

К наружной поверхности первого несущего слоя подводится тепловой поток интенсивности q_t . К нижней поверхности второго несущего слоя приложена реакция инерционного основания Винклера q_r . На контур пластины ($r = r_1$) действуют силы и моменты T_r^1 , H_r^1 , M_r^1 , Q^1 .

Искомыми функциями являются:

w – прогиб срединной плоскости заполнителя пластины;

ψ – относительный сдвиг в заполнителе;

u – радиальное перемещение срединной плоскости заполнителя.

Так как рассматривается осесимметричная задача, то искомые функции не зависят от координаты φ , то есть $u = u(r, t)$; $\psi = \psi(r, t)$; $w = w(r, t)$.

Считаем поверхность $z = -c - h_2$ и контур пластины теплоизолированными. Это допущение позволяет с достаточной точностью вычислять неоднородное температурное поле $T(z)$, отсчитываемое от некоторой начальной температуры T_0 , по формуле (1.111) из [2]:

$$T = \frac{qH}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left(s + \frac{c+h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[\pi n \left(s + \frac{c+h_2}{H} \right) \right] \right\} e^{-n^2 \pi^2 \tau},$$

где $\tau = at / H^2$; $s = z / H$; $a = \lambda / C$; $\lambda = \lambda_k h_k / H$; $C = \rho_k C_k h_k / H$; $a_k = \lambda_k / (C_k \rho_k)$ – температуропроводность k -го слоя; λ_k , C_k – коэффициенты теплопроводности и теплоемкости k -го слоя; ρ_k – плотность материала k -го слоя.

Температуру в слоях пластины в дальнейшем считаем известной и постоянной во времени.

Так как задача осесимметрична, тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют:

$$u_{\varphi}^{(k)} = 0 \quad (k=1, 2, 3 - \text{номер слоя}).$$

Радиальные перемещения в слоях $u_r^{(k)}$ выразим через искомые функции соотношениями:

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - zw_{,r} \quad (c \leq z \leq c + h_1),$$

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - zw_{,r} \quad (-c \leq z \leq c),$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - zw_{,r} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Для получения уравнений движения движения используем вариационный принцип Гамильтона-Остроградского [7]:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - W - A) dt = 0, \quad \int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta W - \delta A) dt = 0, \quad (2)$$

где $A = A_1 + A_2$ – суммарная потенциальная энергия реакции упругого основания и контурных усилий, W – потенциальная энергия деформации, K – кинетическая энергия системы.

Вариации потенциальной энергии реакции упругого основания и потенциальной энергии контурных усилий T_r^1 , H_r^1 , M_r^1 , Q^1 , воздействующих на контур пластины,

$$\delta A_1 = - \iint_S (-q_r) \delta w r dr d\varphi; \quad \delta A_2 = -r_1 \int_0^{2\pi} (T_r^1 \delta u + H_r^1 \delta \psi + M_r^1 \delta w_{,r} + Q^1 \delta w) d\varphi. \quad (3)$$

Суммарная вариация кинетической энергии трехслойного пакета равна:

$$\delta K = \iint_S M_0 \dot{u} \delta \dot{u} + M_1 \dot{\psi} \delta \dot{\psi} + M_2 \dot{w}_{,r} \delta \dot{w}_{,r} + M_0 \dot{w} \delta \dot{w} r dr d\varphi, \quad (4)$$

где

$$M_0 = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + 2\rho_1 c, \quad M_1 = \rho_1 h_1 c^2 + \rho_2 h_2 c^2 + \frac{2}{3} \rho_3 c^3, \\ M_2 = \rho_1 h_1 c^2 + c h_1 + h_1^2 / 3 + \rho_2 h_2 c^2 + c h_2 + h_2^2 / 3 + \frac{2}{3} \rho_3 c^3.$$

Вариация потенциальной энергии деформации

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz \right] r dr d\varphi. \quad (5)$$

Связь между реакцией и прогибом примем в соответствии с моделью Винклера, согласно которой

$$q_r = \kappa_0 w + m_f \ddot{w}, \quad (6)$$

где κ_0 – коэффициент жесткости, m_f – массовый член (удельная масса) упругого основания.

Связь напряжений и деформаций в слоях принимаем в соответствии с законом Гука

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k(T_k) \varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k(T_k) (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T_k) \quad (k=1, 2, 3), \\ s_{rz}^{(3)} = 2G_k(T_k) \varepsilon_{rz}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi), \quad (7)$$

где s_α^k , ε_α^k – девиаторы напряжений и деформаций соответственно; σ^k – шаровое напряжение в k -ом слое; θ^k – объемная деформация k -ом слое; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули сдвига и объемного деформирования; T_k – известная температура k -го слоя; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения материала k -го слоя.

Используя соотношения (7), (2)–(5), получим систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающую свободные поперечные колебания круговой трехслойной пластины, скрепленной с упругим инерционным основанием Винклера (6):

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) = 0, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) = 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - \kappa_0 w - M_0^* \ddot{w} = 0, \quad (8)$$

где M_0^* – удельная масса пластины и основания:

$$M_0^* = M_0 + m_f.$$

Здесь коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2 , L_3 совпадают с соотношениями, введенными в [2] для термоупругой пластины. В системе (8) учли только массовый член M_0 , отвечающий поперечным колебаниям.

В качестве начальных примем следующие условия ($t = 0$)

$$w(r, 0) \equiv f(r), \quad \dot{w}(r, 0) \equiv g(r). \quad (9)$$

Начально-краевая задача замыкается присоединением к (8) граничных и начальных условий (9).

3. Решение начально-краевой задачи. Упростим систему (8), приведя ее к виду

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r,$$

$$\psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + C_4 / r,$$

$$\Delta \Delta w + \kappa^4 w + M^4 \ddot{w} = 0.$$

Здесь

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad \kappa^4 = \kappa_0 D, \quad M^4 = M_0^* D,$$

$$D = \frac{a_1(a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

Так как перемещения в центре пластины ($r = 0$) конечны, то принимаем $C_2 = C_4 = 0$.

Для решения задачи составляем ряды:

$$w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t), \quad \psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad (10)$$

и требуем выполнения начальных условий движения (9).

Собственные колебания пластины описываются системой собственных функций:

$$v(\lambda_n, r) = \frac{1}{d_n} \left[J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r) \right],$$

$$\varphi_n(\lambda_n, r) = \frac{\lambda_n}{d_n} \left[J_1(\lambda_n r_1) \frac{r}{r_1} - J_1(\lambda_n r) + \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} (I_1(\lambda_n r_1) \frac{r}{r_1} - I_1(\lambda_n r)) \right]. \quad (11)$$

Собственные числа λ_n вычисляются из характеристических уравнений, составленных для конкретных граничных условий закрепления пластины.

После вычисления параметров λ_n частоты собственных колебаний вычисляются по формулам:

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4}, \quad \beta_n^4 = \lambda_n^4 + \kappa^4. \quad (12)$$

Здесь следует отметить, что частоты колебаний в каждом из рассмотренных случаев будут зависеть от собственных чисел, геометрических и упругих параметров слоев пластины, а также от коэффициента жесткости основания.

Функция времени

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t), \quad (13)$$

где A_n и B_n – константы интегрирования, определяемые из начальных условий.

Коэффициенты A_n , B_n следуют из (9)

$$A_n = \int_0^{r_1} f(r) v_n r dr, \quad B_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^{r_1} g(r) v_n r dr.$$

Таким образом, перемещения при свободных колебаниях описываются выражениями (10) с учетом систем функций (11) и выражений (13).

4. Численные результаты Числовые результаты получены для круговых трехслойных пластин со следующими характеристиками: радиус пластины $r_1 = 1$; толщины слоев: $h_1 = h_2 = 0,02$; $h_3 = 0,1$; материал несущего слоя – алюминиевый сплав Д16Т, материал заполнителя – фторопласт. При численном исследовании считаем, что все слои пластины нагреваются равномерно на одинаковую температуру.

Частоты собственных колебаний, вычисленные с помощью выражений (12), зависят от геометрических и упругих параметров слоев пластины, а также от коэффициента жесткости основания.

Первые 15 частот для пластины из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Собственные частоты для заземленной по контуру пластины, с^{-1}

Номер n	Собственная частота ω_n			Номер n	Собственная частота ω_n		
	T = 293 К	T = 343 К	T = 393 К		T = 293 К	T = 343 К	T = 393 К
0	265	262	261	8	10609	10204	9937
1	574	556	544	9	13103	12604	12274
2	1203	1159	1129	10	15852	15247	14848
3	2110	2031	1978	11	18862	18143	17668
4	3284	3160	3077	12	22134	21290	20733
5	4722	4542	4424	13	25667	24689	24043
6	6399	6155	5994	14	29463	28339	27598
7	8384	8065	7854				

С увеличением температуры частоты уменьшаются. На первую частоту повышение температуры на 50 К влияет незначительно (порядка 1,1 %). Повышение температуры еще на 50 К уменьшает частоты еще примерно на 0,4 %.

По мере роста номера частоты влияние температуры усиливается. Так, для следующих 14 частот при увеличении температуры на 100 К уменьшение величины частот достигает до 6,3 %. Таким образом, следует отметить, что температура не оказывает существенного влияния на частоты собственных колебаний.

Перемещения пластины на инерционном основании Винклера при свободных колебаниях найдены с помощью выражений (10) с учетом систем функций (11) и выражения (13).

На рисунке 2 показана зависимость прогиба центра пластины из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т на инерционном основании Винклера при различных температурах: 1 – $T = 293 \text{ К}$, 2 – $T = 343 \text{ К}$, 3 – $T = 393 \text{ К}$. Колебания возбуждены приданием каждой точке пластины в начальный момент времени одинаковой скорости 1 м/с. Увеличение температуры на 100 К приводит к увеличению максимальных амплитуд до 12 %. Это объясняется уменьшением упругих характеристик материалов с ростом температуры, что ведет к уменьшению жесткости конструкции. Таким образом, температурное воздействие достаточно слабо влияет на частоты собственных колебаний, увеличение амплитудных значений перемещений достигает 10–12 %, поэтому численное исследование собственных колебаний можно проводить для изотермической пластины.

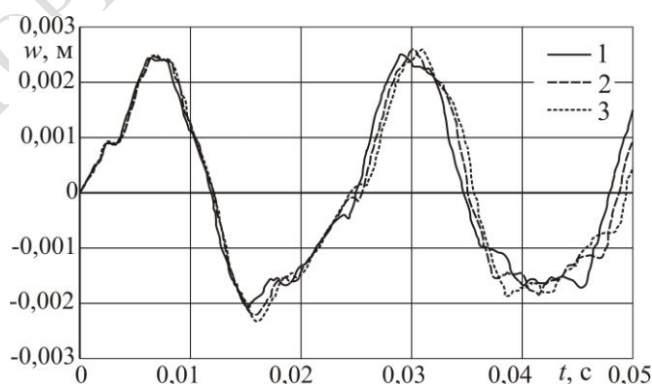


Рисунок 2 – Изменение прогиба центра пластины во времени при различных температурах

Рисунок 3 иллюстрирует зависимость прогиба центра пластины на инерционном основании Винклера при различных параметрах удельной массы упругого основания ($\kappa_0 = 50 \text{ МПа/м}$): 1 – $m_f = 0$ (безынерционное основание), 2 – $m_f = 500 \text{ кг/м}^2$, 3 – $m_f = 1000 \text{ МПа/м}$, 4 – $m_f = 1500 \text{ кг/м}^2$.

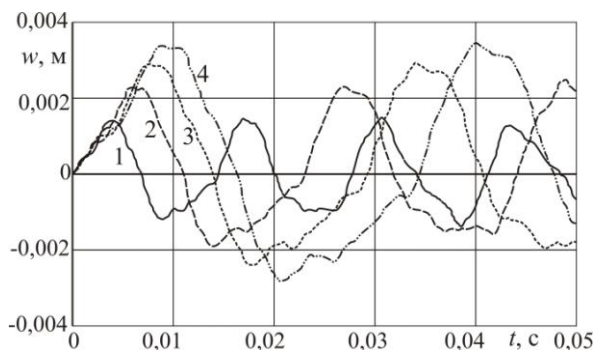


Рисунок 3 – Изменение прогиба центра пластины во времени при различной инерционности основания

Увеличение инерционности основания приводит к увеличению амплитуд колебаний и уменьшению периода. Увеличение удельной массы основания с 500 до 1000 кг/м² приводит к увеличению амплитуд до 47 %, а увеличение удельной массы с 1000 до 1500 кг/м² – к увеличению амплитуд до 25 %.

Таким образом, увеличение инерционности основания нелинейно сказывается на амплитудах колебаний.

Заключение. Предложенная методика исследования свободных колебаний трехслойных круговых пластин на упругом основании позволяет учитывать в инженерных расчетах воздействие температуры и инерционность основания. Численные расчеты показали их значительное влияние на амплитудно-частотные характеристики системы «пластина-основание».

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T18P-090).

Литература

1. Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М. : Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Старовойтов, Э.И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э.И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 344 с.
3. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.
4. Леоненко, Д.В. Термосиловое нагружение трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем на упругом основании / Д.В. Леоненко // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2018. – № 6 (111). – С. 67–73.
5. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Л.Н. Рабинский. – М. : Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.
6. Starovoitov, E.I. Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 46, № 1. – P. 86–93.
7. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.