Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 1

УДК 517.51:517.54 МАТЕМАТИКА

Е. М. ДЫНЬКИН

ГЛАДКИЕ ФУНКЦИИ НА ПЛОСКИХ МНОЖЕСТВАХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 14 IV 1972)

В этой работе рассматриваются аналоги классов Карлемана $C\{M_n\}$ (см. ([1])), состоящие из функций, определенных на подмножествах плоскости C^1 и гладких в смысле Уитни относительно комплексного переменного.

Основная теорема связывает свойства последовательных производных функции f с оценками производной $\partial F / \partial \bar{z}$ некоторого ее продолжения F на всю плоскость. Наличие такой связи хорошо известно для класса $C\{n!\}$ на отрезке вещественной оси: с одной стороны, это класс всех бесконечно дифференцируемых функций f, для которых $|f^{(n)}| \leqslant K_f{}^n n!$, $K_f = \text{const}$, $n = 0, 1, \ldots$, а с другой,— класс всех функций, допускающих аналитическое продолжение в окрестность отрезка. Таким образом, ограничения, первоначально налагаемые на все производные функции f, трансформируются в условие на первые производные ее продолжения — в уравнения Коши — Римана.

Формулируемая ниже основная теорема (частный случай которой содержится в ([2])), прилагается к изучению гладкости суперпозиций $f \circ g$, к сравнению «действительной» и «априорной» гладкостей функций и к задаче о делении функций, регулярных внутри и гладких в замыкании единичного круга.

1. Обозначения и определения. 1°) E — совершенное компактное подмножество плоскости C^1.

2°) ω — модуль непрерывности, регулярный в том смысле, что

$$\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t}\,dt + \delta\int_\delta^1 \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt = O[\omega(\delta)], \quad \delta \to 0.$$

3°) $\{M_n\}_{n\geqslant 0}$ — возрастающая последовательность положительных чисел такая, что последовательность $\{M_n / nM_{n-1}\}_{n\geqslant 1}$ тоже возрастает, причем * $\sup\limits_n (M_{n+1}/M_n)^{1/n} < +\infty$, $\sup\limits_n (M_n/n!)^{1/n} = +\infty$.

4°) Будем говорить, что непрерывная на множестве E функция f принадлежит классу $A_E{}^n$, если существуют функции $f^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, также непрерывные на E и такие, что $f^{(0)} \equiv f$ и при любом $f \leqslant n$

$$f^{(k)}(\zeta) = f^{(k)}(z) + \frac{f^{(k+1)}(z)}{1!}(\zeta - z) + \ldots + \frac{f^{(n)}(z)}{(n-k)}(\zeta - z)^{n-k} + R_{n,k}, \quad (1)$$

где $R_{n,k} = o(|\zeta - z|^{n-k})$ равномерно по $z, \zeta \in E$.

5°) Аналогично, f принадлежит классу $A_E^{n,\omega}$, если в (1) $R_{n,k} = O(|\zeta - z|^{n-k}\omega(|\zeta - z|))$ равномерно по $z, \zeta \in E$.

---

* Иными словами, последовательность $\{M_n\}$ должна расти достаточно регулярно, не слишком быстро, однако быстрее $\{n!\}$.

6°) Функция f принадлежит классу $A_E\{M_n\}$, если существуют такие $f^{(k)}$, $k=0, 1, \ldots$, что при всех k, n, $k \leqslant n$, имеет место (1), причем

$$|R_{n,k}| \leqslant C^n |\zeta - z|^{n-k+1} M_{n+1} / (n-k+1)!, \quad z, \zeta \in E,$$

где константа C зависит только от f.

В случае $E = [0, 1]$ — это обычные определения классов Гёльдера и Карлемана.

7°) Шкала гладкости на множестве E — это совокупность всех классов вида $A_E^{n,\omega}$ и $A_E\{M_n\}$.

8°) Для класса X шкалы гладкости определим его ассоциированный вес равенствами

$$h(r) = \begin{cases} r^{n-1}\omega(r), & r > 0, \quad \text{если } X = A_E^{n,\omega}, \\ \inf\limits_n M_n r^{n-1}/n!, & r > 0, \quad \text{если } X = A_E\{M_n\}. \end{cases}$$

9°) Всюду далее приняты обозначения: $z = x + iy$, $\zeta = \zeta + i\eta$, $\partial / \partial\bar{z} = {}^1/_2(\partial/\partial x + i\,\partial/\partial y)$, $\rho(z, E) = \inf\limits_{\zeta \in E} |\zeta - z|$, $f|_F$ — сужение функции f на множество F.

2. Основная теорема (теорема 1). *Пусть X — класс школы гладкости с ассоциированным весом h, f — функция, заданная на множестве E. Следующие утверждения равносильны:*

1°) $f \in X$;

2°) *f может быть продолжена до функции F, непрерывно дифференцируемой на всей плоскости, причем*

$$\partial F(z) / \partial\bar{z} = O[h(B\rho(z, E))], \quad B = \mathrm{const};$$

3°) *f допускает интегральное представление*

$$f(z) = \iint \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta, \quad z \in E,$$

где функция φ финитна, непрерывна и

$$\varphi(\zeta) = O[h(B\rho(\zeta, E))], \quad B = \mathrm{const}.$$

3. Замена переменной в классах Карлемана. Описание функций классса X, данное в теореме 1, позволяет выяснить, как влияет на классы Карлемана замена переменной. Так, например, имеет место

Теорема 2. *Если $f \in A_E\{M_n\}$, $g \in A_{f(E)}\{M_n\}$, то $g \circ f \in A_E\{M_n\}$.*

Для классов $A_{[0,1]}\{n!^\alpha\}$, $\alpha > 1$,— так называемых классов Жеврея — утверждение теоремы 2 было впервые доказано Жевреем ([3]) и впоследствии неоднократно переоткрывалось (см., например, ([4], [5])).

4. Априорная и действительная гладкость. Другое применение теоремы 1 состоит в выяснении связей между априорной и действительной гладкостями функций на множестве E. Как известно, если функция дифференцируема на множестве E (в смысле комплексного переменного), то в действительности она аналитична в его внутренних точках. С другой стороны, при $E = [0, 1]$ наличие непрерывной производной уже не гарантирует никакой дополнительной гладкости. Естественно поставить вопрос о связи между априорной и действительной гладкостью для произвольного множества E.

Пусть X — класс шкалы гладкости на множестве E, h — его ассоциированный вес. Положим

$$m_n(z) = n! \iint\limits_V h[\rho(\zeta, E)]\, |\zeta - z|^{-n-1} d\xi\, d\eta, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где V — некоторая окрестность множества E.

Пусть множество F, $F \subset E$, также совершенно. Будем называть F множеством типа A^n, если все интегралы, определяющие $m_k(z)$, $k=0, 1, \ldots, n$, сходятся при $z \in F$. Будем называть F множеством типа $A\{M_n\}$, если все интегралы, определяющие $m_k(z)$, $k=0, 1, \ldots$, сходятся и $m_k(z) \leqslant Q^k M_k$, $Q = \mathrm{const}$, равномерно по $z \in F$.

Теорема 3. *Если F совершенно, $F \subset E$, то*

1°) $\{f|_F;\ f \in X\} \subset A_F{}^n$ *тогда и только тогда, когда F имеет тип A^n.*

2°) $\{f|_F;\ f \in X\} \subset A_F\{M_n\}$ *тогда и только тогда, когда F имеет тип $A\{M_n\}$.*

Если F целиком лежит во внутренности E, то, как легко видеть, F имеет тип $A\{n!\}$. Поэтому функции из X будут на множестве F аналитичны. Множества, лежащие на границе E, могут, вообще говоря, иметь любой заранее заданный тип. Так, например, имеет место

Теорема 4. *Для любого регулярного модуля непрерывности ω и любого класса $A_{[0,1]}\{M_n\}$ существует множество E такое, что*

1°) $[0, 1] \subset E$;

2°) $\{f|_{[0,1]};\ f \in A_E^{1,\omega}\} \subset A_{[0,1]}\{M_n\}$;

3°) *если последовательность* $\{M_n'\}_{n\geqslant 1}$ *такова, что* $\varliminf\limits_{n} (M_n / M_n')^{1/n} = +\infty$, *то* $\{f|_{[0,1]};\ f \in A_E^{1,\omega}\} \not\subset A_{[0,1]}\{M_n'\}$;

4°) *если множество F совершенно, $F \subset E$ и $F \not\subset [0, 1]$, то* $\{f|_F;\ f \in A_E^{1,\omega}\} \not\subset A_F{}^2$.

5. Сохранение гладкости при факторизации. В случае, когда $E = \{z \in C^1;\ |z| \leqslant 1\}$ — единичный круг, из теоремы 1 можно получить некоторые результаты о свойствах канонической факторизации функций, гладких на E и аналитических во внутренности E.

Пусть H — некоторый класс функций, определенных и непрерывных при $|z| > 1$, такой, что

1°) для любой функции φ из H функция f, определяемая абсолютно сходящимся интегралом

$$f(z) = \iint\limits_{|\zeta|>1} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta, \tag{2}$$

непрерывна на всей плоскости.

2°) если $\varphi \in H$ и $|\psi| \leqslant |\varphi|$, то $\psi \in H$.

Класс всех функций f вида (2) с $\varphi \in H$ обозначим через X_H. Напомним, что, по определению ([6]), некоторый класс X аналитических в единичном круге функций обладает K-свойством, если для любой функции J, аналитической и ограниченной в единичном круге,

$$f \in X \Rightarrow P_+(f \cdot \bar{J}) \in X,$$

где P_+ — проектор Рисса.

Теорема 5. *Класс X_H обладает K-свойством.*

Из теоремы 5 и теоремы 1 вытекает такое следствие, которое для классов $A^{n,\omega}$ иными методами показано в ([6], [7]):

Следствие. *Все классы шкалы гладкости (на единичном круге) обладают K-свойством.*

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
28 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Мандельбройт, Примыкающие ряды, ИЛ, 1955. [2] Е. М. Дынькин, Записки научн семин. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, Ленингр. отд., **19**, 221 (1970). [3] M. Gevrey, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, **35**, 127 (1918). [4] Г. А. Джанашия, Сообщ. АН ГрузССР, **33**, 2, 257 (1964). [5] Б. С. Павлов, Проблемы матем. физики, 2, Л., 1967. [6] А. П. Хавин, Зап. научн. семин. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, Ленингр. отд., **22**, 202 (1971). [7] Ф. А. Шамоян, Зап. научн. семин., там же, **22**, 206 (1971).